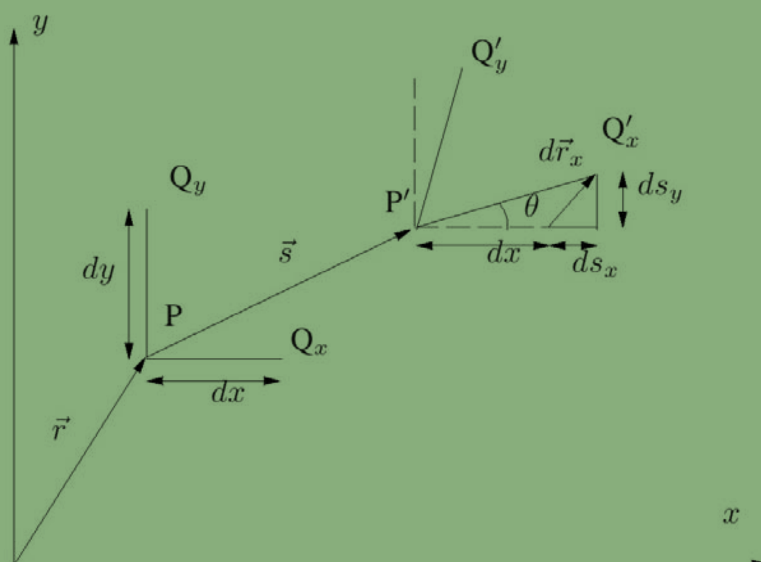
APUNTES DE ELASTICIDAD
PARTE II

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-10-05

APUNTES DE ELASTICIDAD PARTE II

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-10-05

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Apuntes de Elasticidad. Parte II

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 368.01 / 3-10-05
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-413-4
ISBN-13: 978-84-9728-415-8
Depósito Legal: M-9396-2012

Capítulo 3
El tensor de deformaciones.

3.1. Deformación en una dimensión.

Antes de pasar a considerar los casos más generales de deformación en dos y tres dimensiones en el entorno del punto, trataremos el caso más sencillo, que realmente ya se ha visto en el tema introductorio, el de la deformación en una dimensión.

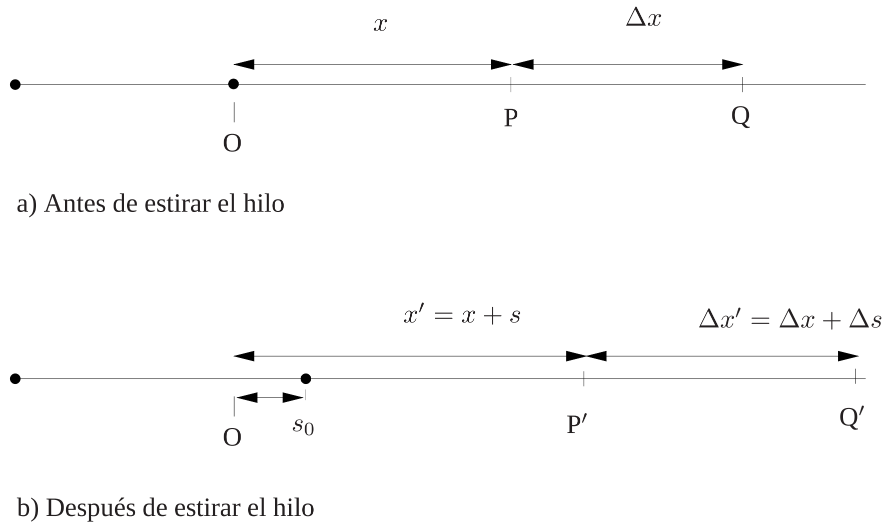


Figura 3–1: Deformaciones en una dimensión

Se considera un hilo elástico que es estirado. Sea O, el origen del sistema de coordenadas, un punto fijo en el espacio (no en el hilo, ni fijado al hilo), y P y Q dos puntos fijos sobre el hilo. Al estirar, se produce un desplazamiento $s(x)$ de cada punto, pasando los puntos P y Q a las nuevas posiciones P′ y Q′, como se muestra en la figura. La nueva posición P′ se encuentra a $x' = x + s$ del origen, la nueva posición Q′ se encuentra a $x + \Delta x + s(x + \Delta x) = x + \Delta x + s(x) + \Delta s = x + s + \Delta x + \Delta s$ del origen y la distancia PQ $= \Delta x$ se transforma en PQ′ $= \Delta x + \Delta s$.

La forma concreta en que cambian estas distancias depende de cómo es el proceso de deformación que se está estudiando. Si éste es homogéneo, el comportamiento es del tipo representado en la parte izquierda de la figura 3–2. En este caso, en el proceso de estiramiento s es una función lineal de x. La parte derecha de la misma figura muestra un ejemplo de una deformación inhomogénea concreta, en la cual s es una función no lineal de x. La forma concreta de la función depende de la deformación concreta.

En realidad, en lo que estamos interesados no es tanto en los desplazamientos absolutos, como en los desplazamientos

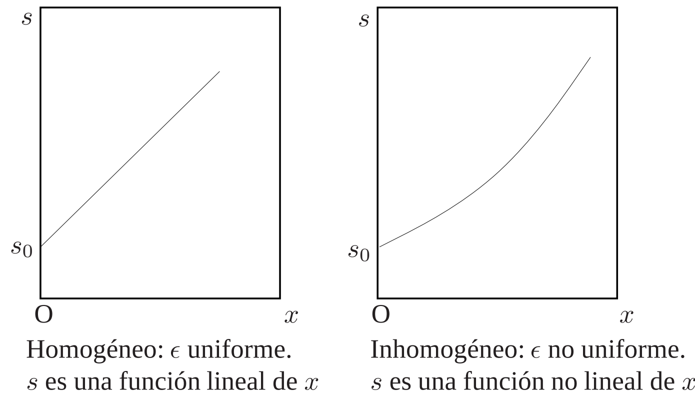


Figura 3–2: Deformaciones homogéneas e inhomogéneas. En el caso de las deformaciones homogéneas s varía de forma lineal con x, mientras que para las deformaciones inhomogéneas esto no es así.

relativos, ya que son éstos los que nos darán el estado de deformaciones de un cuerpo. Para ello definimos la deformación promedio en el segmento PQ en la forma:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta\text{longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{\text{P}'\text{Q}' - \text{PQ}}{\text{PQ}} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \tag{3–1}$$

y al considerar la deformación de segmentos cada vez más pequeños, tendremos la deformación en el entorno del punto P como:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} \tag{3–2}$$

Para el caso de deformación homogénea[†], ϵ no depende de x y por tanto coinciden $\bar{\epsilon}$ y ϵ. En este caso se tiene $s = s_0 + \epsilon x$, donde s_0 es el desplazamiento respecto del origen del punto que originalmente coincidía con él y ϵ una constante, la deformación unitaria, deformación por unidad de longitud medida descontando el efecto de la traslación sin deformación del punto P que ya tiene en cuenta s_0. La nueva posición de P sería entonces $x' = x + s = s_0 + (1+\epsilon)x$

3.2. Deformación en dos dimensiones.

3.2.1. El tensor de desplazamientos y el tensor de deformaciones.

Estudiamos ahora como se produce la deformación de una hoja plana. Como consecuencia del proceso de deformación cada punto de la lámina situado inicialmente en una posición $\vec{r} = (x, y)$ sufre un desplazamiento dado por el *vector de desplazamientos* $\vec{s}$. A cada punto le corresponde un vector de desplazamientos y el conjunto de vectores de desplazamientos forma un campo vectorial, el *campo de los desplazamientos* $\vec{s}(\vec{r}) = \vec{s}(x, y)$. Consideramos un punto P de coordenadas iniciales $\vec{r}$ y un punto Q infinitamente próximo a P, de coordenadas iniciales $\vec{r} + d\vec{r}$ (véase la figura 3–3) de forma que $d\vec{r}$ es el vector posición de Q medido desde P. Al ser puntos infinitamente próximos nuestros resultados podrán aplicarse directamente a deformaciones inhomogéneas.

Como consecuencia de la deformación el punto P se desplaza a P′ (con $\vec{r}_{P'} = \vec{r} + \vec{s}$) y el punto Q se desplaza a Q′ (con $\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_Q + \vec{s}_Q = \vec{r} + d\vec{r} + \vec{s} + d\vec{s}$). El vector $d\vec{r}$ que daba la posición de Q medida desde P pasa a ser $d\vec{r}\,' = \vec{r}_{Q'} - \vec{r}_{P'} = d\vec{r} + d\vec{s}$ que da la nueva posición relativa de Q′ medida desde P′, donde $d\vec{s}$ da la diferencia entre los vectores desplazamiento de P y Q.

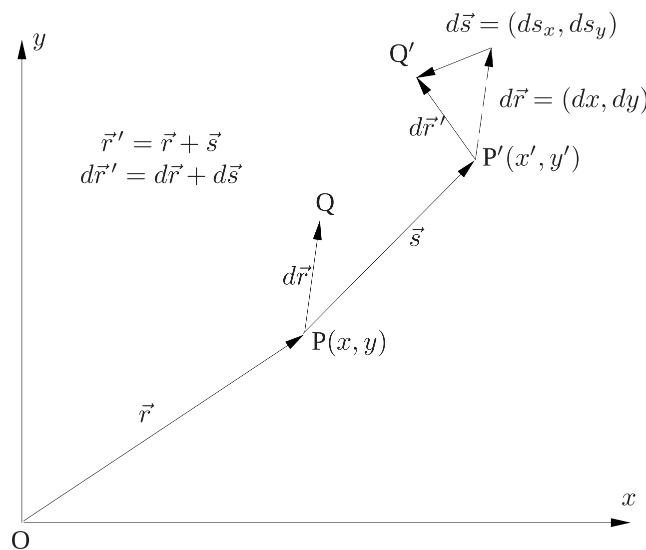


Figura 3–3: Deformación en dos dimensiones

Como P y Q están muy próximos y por tanto dx y dy son muy pequeños, podemos obtener la variación de la función de dos variables $\vec{s} = \vec{s}(x, y)$ entre dos puntos muy próximos separados $d\vec{r}$ entre los que la variable x cambia en dx y la variable

[†] Para el caso de deformación inhomogénea se tendría la integral $s = s_0 + \int_{x=0}^{x} \epsilon(x)dx$ y $x' = x + s = x + s_0 + \int_{x=0}^{x} \epsilon(x)dx$

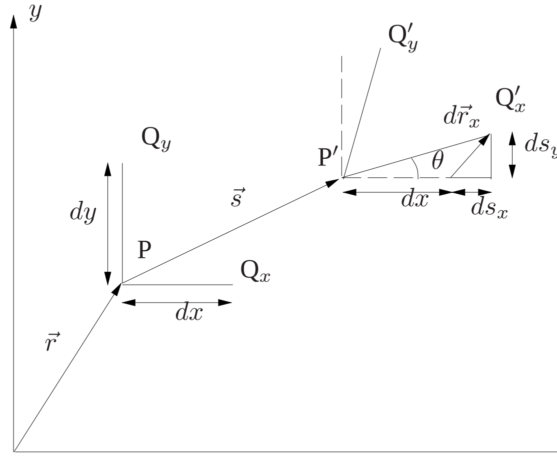


Figura 3–4: Significado físico de las componentes del tensor de desplazamientos $[e_{ij}]$.

y en dy

$$\left.\begin{aligned} ds_x &= \frac{\partial s_x}{\partial x}dx + \frac{\partial s_x}{\partial y}dy = e_{xx}dx + e_{xy}dy \\ ds_y &= \frac{\partial s_y}{\partial x}dx + \frac{\partial s_y}{\partial y}dy = e_{yx}dx + e_{yy}dy \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} ds_x \\ ds_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d\vec{s} = \hat{e}\, d\vec{r}, \tag{3–3}$$

donde hemos definido las magnitudes

$$e_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial s_y}{\partial y} \quad e_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} \quad e_{yx} = \frac{\partial s_y}{\partial x} \tag{3–4}$$

que son cantidades *adimensionales* pequeñas comparadas con la unidad.

Como tanto (ds_x, ds_y) como (dx, dy) son las componentes de dos vectores, un conjunto de componentes $[e_{ij}]$ que relacionan las componentes de dos vectores como lo hacen en la ecuación (3–3) deben transformarse como las componentes de un tensor de segundo orden. Las e_{ij} forman un tensor de segundo orden al que denominamos *tensor de desplazamientos*.

Es necesario tener precaución de no incluir en las expresiones de la deformación términos que corresponden a traslación como un sólido rígido, ya que éstos dan una variación de la posición absoluta de Q. Como en vez de la posición absoluta de Q se está considerando la posición relativa de Q respecto de P (es decir $d\vec{r}$) y cuál es la variación de ésta (es decir $d\vec{s}$), se está dejando de lado de forma consciente la variación de la posición de P producida no por la deformación entre P y Q, sino por la traslación (y rotación) del punto P.

¿Qué significan físicamente las magnitudes e_{ij} que acabamos de definir en (3–4)? Para verlo, estudiaremos qué ocurre durante la deformación con dos segmentos dirigidos inicialmente a lo largo de los ejes coordenados. Para el segmento PQ$_x$ de longitud dx y dirigido inicialmente según x se cumplirá $dy = 0$ mientras que para el segmento PQ$_y$ de longitud dy y dirigido inicialmente según y se cumplirá $dx = 0$ (Véase la figura 3–4). Para PQ$_x$ se tiene

$$\begin{aligned} ds_x &= \frac{\partial s_x}{\partial x}dx = e_{xx}dx \\ ds_y &= \frac{\partial s_y}{\partial x}dx = e_{yx}dx \end{aligned} \tag{3–5}$$

Así, $e_{xx} = ds_x/dx$ mide la deformación por unidad de longitud de PQ$_x$, medida a lo largo de Ox. A su vez, e_{yx} mide la rotación (antihoraria) de PQ$_x$, ya que el ángulo de giro viene dado por

$$\tan\theta = \frac{ds_y}{dx + ds_x} \simeq \frac{ds_y}{dx} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{ds_y}{dx} \tag{3–6}$$

al ser ds_x un diferencial de segundo orden respecto de dx y cumplirse que, para deformaciones pequeñas $\tan\theta \simeq \theta$.

Procediendo del mismo modo para PQ$_y$ se obtiene que e_{yy} es la deformación por unidad de longitud de PQ$_y$ según Oy, y que e_{xy} es la rotación en sentido horario de PQ$_y$ a P′Q′$_y$.

Para que este tensor sea una buena medida del estado de deformaciones en el punto P, es evidente que cuando no hay deformación todas las e_{ij} deben ser 0. Sin embargo, esto no siempre es así. Para ver esto, consideraremos el caso en que el

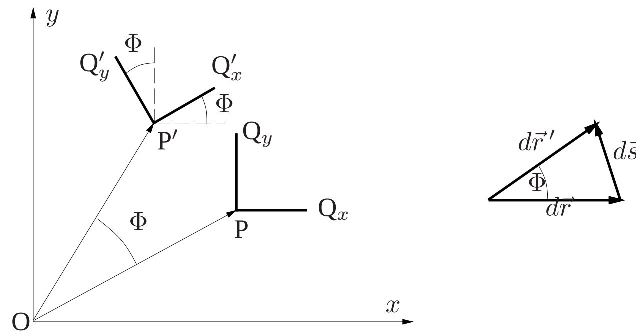


Figura 3–5: Efecto de la rotación como un sólido rígido

cuerpo objeto de estudio gira como un sólido rígido un pequeño ángulo Φ en sentido antihorario. Cuando se tiene en cuenta el significado geométrico de las e_{ij} se tiene un tensor de la forma:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\Phi - 1 & -\operatorname{sen}\Phi \\ \operatorname{sen}\Phi & \cos\Phi - 1 \end{pmatrix} \tag{3–7}$$

que, en el límite de pequeños ángulos queda

$$e_{ij} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -\Phi \\ \Phi & 0 \end{pmatrix} \tag{3–8}$$

Así, observamos que aunque no hay una deformación real, las e_{ij} no se hacen 0. La razón de esto es que tenemos incluida en el tensor el efecto de la rotación como un sólido rígido, y esta contribución no corresponde a una deformación real. Para tener un tensor que realmente caracterice el estado de deformaciones en un punto, tendremos que sacar esta contribución. Para ello, descomponemos el tensor de segundo rango que hemos obtenido en la suma de dos tensores, uno simétrico y uno antisimétrico $[e_{ij}] = [\epsilon_{ij}] + [\omega_{ij}]$, con las componentes definidas en la forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \qquad \text{y} \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \tag{3–9}$$

El tensor $[\epsilon_{ij}]$, que es simétrico, es el *tensor de deformaciones*, y es el que da el estado de deformaciones de un cuerpo en un punto.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) \\ \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) & e_{yy} \end{pmatrix} \tag{3–10}$$

Las componentes diagonales son las deformaciones normales al plano correspondiente y dan las deformaciones unitarias en las direcciones Ox y Oy, mientras que las componentes no diagonales corresponden a la deformación angular o cortante, tangente al plano correspondiente. Dos elementos de longitud paralelos a Ox y Oy antes de la deformación, forman entre sí después de ésta un ángulo $\frac{\pi}{2} - 2\epsilon_{xy}$. Es conveniente recalcar que la deformación por corte ϵ_{xy} es la mitad del cambio de ángulo entre los elementos.

El tensor antisimétrico $[\omega_{ij}]$ estará asociado a la rotación del cuerpo como un sólido rígido. De hecho, en la ecuación (3–7), el tensor $[e_{ij}]$ que allí aparece es realmente $[\omega_{ij}]$, ya que no hay deformación, y a su vez es $[\mathcal{R}^{-1} - \mathbb{I}]$, donde $\mathbb{I}$ es el tensor identidad y $\mathcal{R}$ es la matriz de rotación que da el cambio en las componentes de un vector cuando pasan de representarse en el sistema de ejes xyz original a representarse en el sistema de ejes XYZ rotado un ángulo Φ respecto del anterior.

Así, en el caso general se tiene

$$d\vec{s} = [\hat{e}]d\vec{r} = [\hat{\epsilon} + \hat{\omega}]d\vec{r}$$

y

$$d\vec{r}\,' = d\vec{r} + d\vec{s} = [\mathbb{I} + \hat{e}]d\vec{r} = [\mathbb{I} + \hat{\epsilon} + \hat{\omega}]d\vec{r} = [\mathcal{R}^{-1} + \hat{\epsilon}]d\vec{r}$$

que cuando no hay deformación, sino únicamente rotación como sólido rígido, queda

$$d\vec{r}\,' = \mathcal{R}^{-1}d\vec{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{R}d\vec{r}\,' = d\vec{r}$$

Se denomina *vector deformación* al vector $\vec{\varepsilon} = [\hat{\epsilon}]\vec{u}$, donde $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección de $d\vec{r}$. El vector deformación así definido está asociado a deformaciones por unidad de longitud en el entorno de un punto, para un segmento infinitesimal

inicialmente en la dirección dada y por tanto, es una magnitud adimensional. Se denominan *componentes intrínsecas* del vector deformación a sus componentes paralela ($\varepsilon_{\parallel}$) y perpendicular ($\varepsilon_{\perp}$) a $d\vec{r}$ (y por tanto a $\vec{u}$). Nótese que el vector deformación no es lo mismo que el vector $d\vec{s}$ (pág. 36) para un vector unitario según $d\vec{r}$. En general $d\vec{s}$ contiene una componente de rotación como sólido rígido y además en deformaciones inhomogéneas la contribución de los puntos originalmente según $\vec{u} \parallel d\vec{r}$ va cambiando.

3.2.2. Deformación homogénea en dos dimensiones.

Durante una deformación homogénea, las e_{ij} son constantes a lo largo del cuerpo y se tiene:

$$s_i = (s_0)_i + \sum_j e_{ij} r_j \qquad \begin{array}{l} (i,j = x,y) \\ (r_i, r_j = x, y) \end{array} \tag{3–11}$$

donde $(s_0)_i$ es el desplazamiento del punto original en el eje Or_i. Una curva que antes de la deformación es $f(x,y) = 0$ pasa a ser después de la deformación $f(x', y') = 0$, con

$$\begin{aligned} x' &= x + s_x = (s_0)_x + x + e_{xx}x + e_{xy}y \\ y' &= y + s_y = (s_0)_y + y + e_{yx}x + e_{yy}y \end{aligned} \tag{3–12}$$

Por ser una sustitución lineal se tiene que, durante una deformación homogénea:

1. Las líneas rectas siguen siendo líneas rectas.
2. Las líneas paralelas siguen manteniéndose paralelas entre sí después de la deformación.
3. Todas las líneas rectas en una dirección se extienden o contraen un mismo factor.
4. Una elipse se transforma en otra elipse, y en particular, un círculo en una elipse.

3.3. Deformación en tres dimensiones.

Para abordar el estudio de las deformaciones en tres dimensiones se sigue un procedimiento completamente similar al seguido en dos dimensiones, por lo que no se repetirá. Se definen nueve componentes de un tensor en la forma:

$$e_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} \qquad \begin{array}{l} (i,j = x,y,z) \\ (r_x, r_y, r_z = x, y, z) \end{array} \tag{3–13}$$

donde e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} representan deformaciones unitarias en las direcciones Ox, Oy y Oz, respectivamente, e_{xy} representa la rotación alrededor de Oz de un elemento originalmente paralelo a Oy hacia Ox, e_{yx} representa la rotación alrededor de Oz de un elemento paralelo a Ox hacia Oy, y del mismo modo para los demás elementos. Por el mismo procedimiento que en el caso bidimensional se obtiene que este tensor no es una buena medida del estado de deformaciones de un cuerpo en un punto, que debe estar dado por un tensor simétrico, para evitar la contribución de la rotación del cuerpo como un sólido rígido. Así, se define el tensor deformación a partir de $[e_{ij}]$ en la forma $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})$, quedando:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) & \frac{1}{2}(e_{xz} + e_{zx}) \\ \frac{1}{2}(e_{yx} + e_{xy}) & e_{yy} & \frac{1}{2}(e_{yz} + e_{zy}) \\ \frac{1}{2}(e_{zx} + e_{xz}) & \frac{1}{2}(e_{zy} + e_{yz}) & e_{zz} \end{pmatrix} \tag{3–14}$$

donde las componentes diagonales y no diagonales tienen el mismo significado que en el caso bidimensional, componentes normales y cortantes de la deformación. El vector deformación y sus componentes intrínsecas se definen en la misma forma que vimos en el caso bidimensional y tienen el mismo significado.

Como el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, existirá siempre un sistema de ejes (ejes principales) en el que este tensor es diagonal con autovalores (las deformaciones principales) reales ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{3–15}$$

Además de ser los ejes en los que el tensor de tensiones es diagonal, los ejes principales satisfacen la condición de ser tres direcciones mutuamente ortogonales que siguen siendo ortogonales entre sí después de la deformación. Nótese que si hay

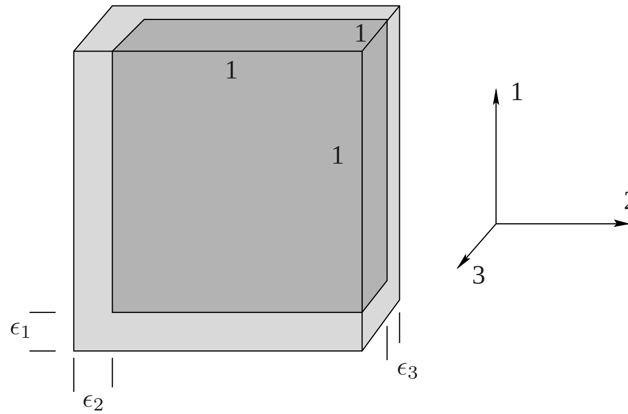


Figura 3–6: Deformación volumétrica. La traza del tensor de deformaciones da la deformación cúbica o variación relativa de volumen.

componente de rotación como sólido rígido las direcciones principales pueden cambiar a consecuencia de la misma, pero siguen siendo mutuamente perpendiculares.

El tensor de deformaciones debe tener los tres invariantes bajo cambio del sistema de ejes por rotación fija

1. *Traza* del tensor o *invariante de primer orden*, suma de los elementos de la diagonal del tensor, $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$.

   La traza del tensor de deformaciones representa la denominada *deformación unitaria de volumen* o *deformación cúbica*, variación relativa del volumen. Para verlo, consideramos el cubo de arista unidad de la figura 3–6 que se deforma de forma homogénea según los ejes principales, con una variación relativa de volumen

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) - 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \qquad (3\text{–}16)$$

   donde hemos despreciado términos pequeños de orden superior. La expresión anterior también es cierta para una deformación inhomogénea tomando un elemento de volumen infinitesimal en el entorno del punto considerado y para cualquier otro sistema de ejes al ser la traza un invariante del tensor.

2. *Invariante de segundo orden*, suma de los determinantes de los menores complementarios de los elementos de la diagonal

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{vmatrix}$$

   igual a $\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2$ en ejes principales.

3. *Determinante* del tensor o *invariante de tercer orden*

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

   que en ejes principales es simplemente $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$

3.3.1. Deformación homogénea en tres dimensiones.

Se tiene, para este caso de tres dimensiones que, una vez separadas las rotaciones:

$$s_i = (s_0)_i + \sum_j \omega_{ij} r_j + \sum_j \epsilon_{ij} r_j \qquad (3\text{–}17)$$

Para separar por completo la parte de sólido rígido (traslación más rotación) se define:

$$\overline{s}_i = \sum_j \epsilon_{ij} r_j \qquad (3\text{–}18)$$

Además de las condiciones vistas para la deformación homogénea en dos dimensiones, durante una deformación homogénea en tres dimensiones los planos siguen siendo planos y los planos paralelos se mantienen paralelos durante la deformación. Asimismo las esferas (un caso particular de elipsoide) se convierten en elipsoides genéricos.

3.3.2. Las ecuaciones de compatibilidad.

Analizaremos en mayor detalle las ecuaciones (3–13) y (3–14). Como tenemos seis ϵ_{ij} independientes se tendrán seis ecuaciones, una para cada componente de la deformación, pero en función de sólo tres componentes del desplazamiento s_x, s_y, s_z. Así, si conocemos $\vec{s}(x, y, z)$ podremos obtener directamente las deformaciones.

Un punto de vista alternativo consistiría en considerar las seis deformaciones ϵ_{ij} en función de la posición, y a partir de ellas intentar obtener $\vec{s}(x, y, z)$. Pero esto nos da un conjunto de seis ecuaciones para el cálculo de las tres incógnitas s_x, s_y, s_z, que en principio sería un sistema de ecuaciones indeterminado ya que tiene más condiciones que variables y por tanto no permitiría obtener los desplazamientos a partir del mismo. Sin embargo, esto no ocurriría si existieran relaciones adicionales entre las componentes de la deformación que redujeran el número de ecuaciones independientes a tres. Esto significa que en realidad las seis componentes independientes de ϵ_{ij} no pueden definirse arbitrariamente en el espacio si queremos encontrar funciones únicas y continuas para describir el desplazamiento $\vec{s}(x, y, z)$, de forma que el medio se deforme de forma *compatible*, es decir, sin saltos ni solapes. Por este motivo, deben existir al menos tres relaciones adicionales que nos permitan establecer una relación biunívoca entre deformaciones y desplazamientos.

Para obtener estas relaciones comenzaremos con las definiciones de ϵ_{xx} y ϵ_{yy} vistas al principio de esta sección. Si derivamos la primera dos veces respecto de y y la segunda dos veces respecto de x, y sumamos los resultados, se tiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 s_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 s_y}{\partial x^2 \partial y}$$

y si, a partir de la definición de ϵ_{xy} derivamos respecto de x y respecto de y, se tiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right)$$

que, comparando con la ecuación anterior, da

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \qquad (3\text{–}19a)$$

obteniéndose de forma similar otras dos ecuaciones,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad (3\text{–}19b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z}. \qquad (3\text{–}19c)$$

Partamos ahora de las definiciones de ϵ_{xy}, ϵ_{yz} y ϵ_{zx},

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right); \qquad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right); \qquad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right)$$

Despejando s_i y derivando adecuadamente se tiene

$$\frac{\partial s_x}{\partial y} = 2\epsilon_{xy} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 s_x}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial^2 s_y}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial s_x}{\partial z} = 2\epsilon_{xz} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 s_x}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial^2 s_z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = 2\epsilon_{yz} \rightarrow \qquad 0 = \frac{\partial^2 s_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x}.$$

Si sumamos y derivamos de nuevo respecto de x se tiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 s_x}{\partial x \partial y \partial z},$$

que comparado con

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 s_x}{\partial x \partial y \partial z}$$

da

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y}\right), \quad (3\text{–}19d)$$

y de forma análoga se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y}\right) \quad (3\text{–}19e)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y}\right) \quad (3\text{–}19f)$$

que dan un total de seis ecuaciones que deben cumplir las componentes del tensor de deformaciones para que exista una solución continua para el campo de desplazamientos. Se les denomina *ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant*.

Ahora bien, necesitábamos tres ecuaciones, pero hemos obtenido seis. No debe extrañarnos porque las ecuaciones anteriores no son independientes entre sí, y puede verse que son equivalentes a tres ecuaciones independientes de cuarto orden.

3.3.3. Forma cuadrática asociada a la deformación y elipsoide de deformación.

El invariante de segundo orden del tensor de deformaciones (forma cuadrática del tensor de deformaciones) tiene la forma

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ij} r_i r_j = 1$$

y es idéntica a la forma cuadrática del tensor de desplazamientos

$$\sum_{i,j} e_{ij} r_i r_j = 1$$

como se ve desarrollando su expresión y eliminando términos. Así, ésta última contiene información únicamente sobre la parte simétrica.

Para obtener la deformación unitaria en una dirección arbitraria analizaríamos cómo cambia la componente según esa dirección de un segmento unidad $\vec{u}$ dirigido originalmente a lo largo de la misma. Al producirse la deformación, tendremos en general cambio de longitud y de dirección, de forma que la deformación produce un desplazamiento del extremo en la forma

$$\Delta s_i = \sum_j \epsilon_{ij} u_j$$

para deformaciones homogéneas, que utilizamos por claridad. Así, la deformación en la dirección original es la componente de $\Delta\vec{s}$ en dicha dirección,

$$\epsilon_\Delta = \sum_i \Delta s_i u_i = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} u_i u_j$$

y, en ejes principales,

$$\epsilon_\Delta = \epsilon_1 u_1^2 + \epsilon_2 u_2^2 + \epsilon_3 u_3^2.$$

Esto puede verse gráficamente en la figura 3–7, donde la longitud del radio-vector OP en la dirección de $\vec{u}_\Delta$ es $1/\sqrt{\epsilon}$ y su dirección normal a la cuádrica en el punto P.

El *elipsoide de deformación* surge al estudiar como es la deformación de una esfera unidad cuando los calores principales del tensor de deformaciones son $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \to \frac{r_1^2}{(1+\epsilon_1)^2} + \frac{r_2^2}{(1+\epsilon_2)^2} + \frac{r_3^2}{(1+\epsilon_3)^2} = 1 \quad (3\text{–}20)$$

siendo esta última expresión la del elipsoide de deformación, que no debe confundirse con la cuádrica del tensor de deformaciones, que puede ser un elipsoide real o imaginario o un hiperboloide de una o dos hojas, mientras que como su nombre indica, el elipsoide de deformación es siempre un elipsoide.

En ingeniería se suele utilizar una notación diferente para las deformaciones cortantes, escribiendo ϵ_{ij} en la forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ con } \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} \quad (3\text{–}21)$$

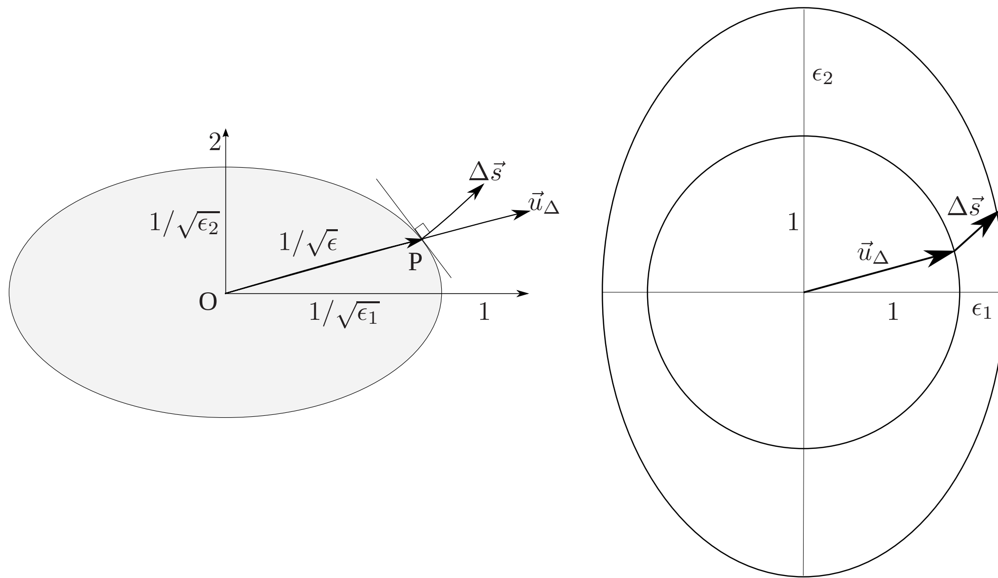


Figura 3–7: Deformación homogénea en tres dimensiones analizada mediante la cuádrica de deformaciones.

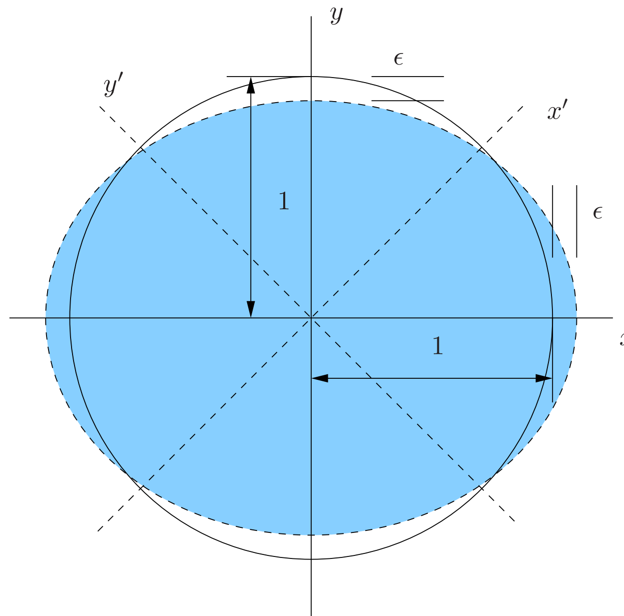


Figura 3–8: Deformación de una esfera en un cortante

Así, por ejemplo γ_{xy}, es igual a la variación del ángulo entre dos líneas que estaban dirigidas originalmente según las direcciones Ox y Oy. Aunque a menudo se les llama componentes cortantes de la deformación, deformaciones cortantes o simplemente cortantes, en sí no son componentes del tensor de deformaciones, ya que a causa del factor 2 no se transforman bajo rotación como las componentes de un tensor. Este γ es equivalente al ángulo cortante que veíamos en el tema de introducción.

3.3.4. Deformación plana.

En el caso de la deformación plana, una de las deformaciones principales es 0. Un cortante puro es un caso especial de deformación plana que tiene la forma, para un cortante en el plano xy:

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 45^\circ \rightarrow \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3–22}$$

donde se representa el efecto de rotar el sistema de ejes 45 grados alrededor de z. La traza es 0, es decir la deformación cúbica es 0. Esto se puede apreciar en la figura 3–8, donde se muestra como es la deformación de una esfera en esas condiciones.

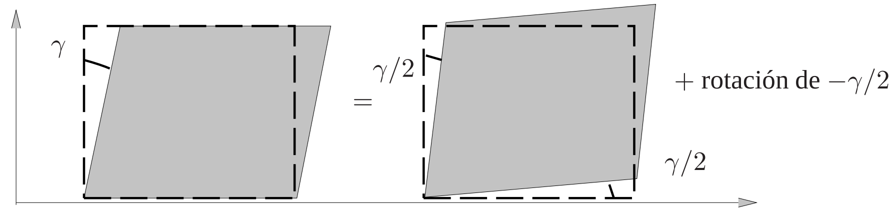


Figura 3–9: Deformación cortante vista desde el sistema en el que se saca el tensor de desplazamientos y desde el sistema rotado $\gamma/2$ en el que se saca el tensor de deformaciones. A menudo se denomina *cortante simple* al primer caso y *cortante puro* al segundo. El cortante simple es el cortante puro más una rotación de $\gamma/2$.

Se puede observar como es cero la extensión en las giradas $45°$. Nótese también que en general tensión plana y deformación plana no son equivalentes, ni siquiera en un material isótropo, un estado de tensión plana puede dar lugar a un estado con deformaciones longitudinales en las tres direcciones y en cambio obtenerse un estado de deformación plana mediante tensiones longitudinales en las tres direcciones del espacio.

El caso del cortante simple que se había estudiado en el primer tema corresponde a un deformación cortante pura más una rotación de $\frac{1}{2}\gamma$, como se puede ver en la figura 3–9.

3.4. Expansión térmica.

Asimismo, se puede utilizar el tensor de deformaciones para especificar la deformación resultante del cambio de temperatura de un material. Cuando se produce un pequeño cambio de temperatura ΔT, de forma uniforme en todo el cuerpo, aparece una deformación homogénea a lo largo del material. En estas condiciones, las componentes de $[\epsilon_{ij}^{tér}]$ son proporcionales a ΔT:

$$\epsilon_{ij}^{tér} = \alpha_{ij}\Delta T \tag{3–23}$$

siendo las α_{ij} los *coeficientes de expansión térmica lineal* o *coeficientes de dilatación lineal*. Como $[\epsilon_{ij}^{tér}]$ es un tensor simétrico, $[\alpha_{ij}]$ también será un tensor simétrico, al ser el anterior multiplicado por una constante.

Por esta misma razón, los ejes principales del tensor $[\alpha_{ij}]$ coincidirán con los del tensor $[\epsilon_{ij}^{tér}]$. En ejes principales se tendrá:

$$\epsilon_{1_{(térmica)}} = \alpha_1\Delta T \quad \epsilon_{2_{(térmica)}} = \alpha_2\Delta T \quad \epsilon_{3_{(térmica)}} = \alpha_3\Delta T \tag{3–24}$$

siendo los α_1, α_2, α_3 los coeficientes principales de expansión térmica. Por efecto del cambio de temperatura, una esfera del material se convierte en un elipsoide con ejes proporcionales a $(1+\alpha_1)$, $(1+\alpha_2)$ y $(1+\alpha_3)$.

La cuádrica para la expansión térmica es:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i,j}\alpha_{ij}r_ir_j = 1 & \text{en unos ejes generales} \\ \alpha_1r_1^2+\alpha_2r_2^2+\alpha_3r_3^2 = 1 & \text{en los ejes principales} \end{array} \tag{3–25}$$

El *coeficiente de expansión de volumen* o coeficiente de dilatación cúbica α_v es la traza del tensor $[\alpha_{ij}]$, que en el sistema de ejes principales es $\alpha_v = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ y en un sistema de ejes general xyz es $\alpha_v = \alpha_{xx}+\alpha_{yy}+\alpha_{zz}$. Aunque los α_{ij} suelen ser positivos, hay materiales que los tienen negativos (calcita, berilio, ioduro de plata, etc...).

En materiales isótropos, que son buena parte de los materiales que interesan en este curso, todas las α_{ij} son iguales entre sí y se tiene $\alpha_v = 3\alpha_l$, donde hemos llamado al coeficiente de expansión térmico lineal α_l, quedando las relaciones entre las dimensiones iniciales y finales en la forma:

$$l = l_0(1+\alpha_l\Delta T), \quad V = V_0(1+\alpha_v\Delta T) \qquad \text{con } \alpha_v = 3\alpha_l \tag{3–26}$$

como ya se vio anteriormente.

Capítulo 4
La ley de Hooke generalizada.

4.1. El tensor de las constantes elásticas.

Se ha visto en el primer capítulo la forma que tiene la ley de Hooke para el caso de una tensión uniaxial y la deformación unitaria uniaxial asociada, así como para el caso de una tensión cortante y el ángulo cortante de deformación asociado.

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon \\ \tau &= G\gamma \end{aligned} \tag{4–1}$$

y es el momento de preguntarse cual es la forma que toma esta ley de Hooke cuando se tiene el efecto combinado de tensiones normales y cortantes en el entorno próximo de un punto del material. Hemos visto que para el caso general, el estado de tensiones de un cuerpo se describe mediante un tensor de tensiones $[\tau_{ij}]$, y el estado de deformaciones del mismo mediante un tensor $[\epsilon_{ij}]$, y lo que nos estamos preguntando en este momento es cómo y cuál es la relación entre los tensores de tensiones y deformaciones. Como los tensores de tensiones y deformaciones son tensores de segundo orden, estarán relacionados por un tensor de cuarto orden, que relacionará las componentes de la tensión y de la deformación en la forma:

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{4–2}$$

o a la inversa

$$\epsilon_{ij} = \sum_{kl} S_{ijkl}\tau_{kl} \tag{4–3}$$

donde las C_{ijkl} son las *constantes elásticas* del material y S_{ijkl} las *deformabilidades* del material. Al tensor de las C_{ijkl} se le denomina *tensor de las constantes elásticas* o *tensor elástico*. Se denomina a la relación (4–2) (o a la 4–3) *ley de Hooke generalizada*.

De este modo, se observa que en general, el resultado de aplicar una tensión genérica τ_{ij} es una deformación unitaria resultante no nula no sólo en la misma componente, sino en principio en todas las demás. Asimismo, en el caso general, una componente cualquiera del tensor de deformaciones puede tener su origen en cualquiera de las componentes del tensor de tensiones, o en varias de ellas a la vez. Así, por ejemplo, para la componente σ_{xx} de la tensión se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \equiv \tau_{xx} = \; & C_{xxxx}\epsilon_{xx} + C_{xxxy}\epsilon_{xy} + C_{xxxz}\epsilon_{xz} + \\ & + C_{xxyx}\epsilon_{yx} + C_{xxyy}\epsilon_{yy} + C_{xxyz}\epsilon_{yz} + \\ & + C_{xxzx}\epsilon_{zx} + C_{xxzy}\epsilon_{zy} + C_{xxzz}\epsilon_{zz} \end{aligned} \tag{4–4}$$

y de forma análoga para las otras ocho componentes del tensor de tensiones. De este modo se observa que la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones es a través de un tensor de cuarto orden y tres dimensiones que en general tendrá 81 componentes.

Un análisis de las propiedades de los tensores de tensiones y deformaciones nos muestra que el número de constantes elásticas independientes es sensiblemente menor ya que muchas de ellas son iguales entre sí, incluso en el caso más desfavorable. Para ver esto consideremos en primer lugar la forma que toma la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones para una componente general τ_{ij} del tensor de tensiones:

$$\tau_{ij} = C_{ijxx}\epsilon_{xx} + C_{ijxy}\epsilon_{xy} + \cdots + C_{ijyx}\epsilon_{yx} + \cdots \tag{4–5}$$

Como el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, podremos escribir:

$$C_{ijxy}\epsilon_{xy} + C_{ijyx}\epsilon_{yx} = (C_{ijxy} + C_{ijyx})\epsilon_{xy} \tag{4–6}$$

y análogamente para las demás componentes del mismo tipo. Así, vemos que las componentes C_{ijkl} y C_{ijlk} no aparecen nunca de forma independiente, sino siempre como la suma de las dos. De hecho, cuando se miden experimentalmente estas constantes elásticas, no se miden cada una por separado, sino siempre se mide la suma de las dos, y lo que afecta al resultado no es cada uno de los valores individuales, sino su suma. Así, la relación entre tensiones y deformaciones es la misma para

cualesquiera valores individuales de C_{ijkl} y C_{ijlk} que den el valor correcto de la suma. La elección más sencilla consiste en escoger ambas constantes elásticas iguales entre sí, e iguales por tanto cada una de ellas a la semisuma de las dos, a la mitad del valor experimental de la suma:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \tag{4–7}$$

Consideremos ahora los desarrollos para las dos tensiones τ_{ij} y τ_{ji}:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \sum_{kl} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ \tau_{ji} &= \sum_{kl} C_{jikl}\epsilon_{kl} \end{aligned} \tag{4–8}$$

Como el tensor de tensiones es simétrico, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ y restando las dos expresiones se tiene:

$$\tau_{ij} - \tau_{ji} = 0 = \sum_{kl} (C_{ijkl} - C_{jikl})\epsilon_{kl} \tag{4–9}$$

que debe ser cero cualquiera que sean las deformaciones unitarias. Para que esto sea así, se debe cumplir:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{4–10}$$

Estas dos condiciones deben de cumplirse siempre y reducen el número de constantes elásticas independientes de 81 a 36, lo que es lógico, ya que tanto el tensor de tensiones como el de deformaciones tienen sólo seis componentes independientes. Antes de tener en cuenta las propiedades de simetría del medio puede verse, mediante consideraciones energéticas, que incluso en el caso más desfavorable (la simetría cristalina más baja, sistema triclínico clase **1**) el número de constantes elásticas independientes es 21 ya que se cumple $C_{ijkl} = C_{klij}$. Para simetrías cristalinas más altas el número de constantes independientes será menor, tanto menor cuanto mayor es la simetría hasta llegar a las tres constantes independientes que se tiene para un cristal cúbico o a las dos que se tienen para un material isótropo.

4.2. Isotropía. Constantes de Lamé.

Se dice que un medio es isótropo cuando todas las direcciones son equivalentes en el mismo. En el caso de un material isótropo el número de constantes elásticas independientes se reduce drásticamente de 21 a sólo dos. En un medio isótropo los ejes principales de los tensores de tensiones y deformaciones coinciden (los ejes de la cuádrica de tensiones coinciden con los ejes de la cuádrica de deformaciones). Esto hace que para un cuerpo isótropo sólo haya dos constantes elásticas independientes. Por ejemplo, para la tensión normal σ_{xx}, la ley de Hooke queda:

$$\sigma_{xx} = C_{xxxx}\epsilon_{xx} + C_{xxyy}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \tag{4–11}$$

y para una tensión cortante genérica queda:

$$\tau_{ij} = C_{xyxy}\epsilon_{ij} = (C_{xxxx} - C_{xxyy})\,\epsilon_{ij} \qquad \text{para} \qquad i \neq j \tag{4–12}$$

En vez de las constantes elásticas anteriores, en el caso de materiales isótropos se suelen utilizar las constantes de Lamé, definidas en la forma:

$$\lambda = C_{xxyy} \qquad\qquad 2\mu = C_{xxxx} - C_{xxyy} \tag{4–13}$$

quedando la relación entre las tensiones y deformaciones normales en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}) + 2\mu\epsilon_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}) + 2\mu\epsilon_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}) + 2\mu\epsilon_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{aligned} \tag{4–14}$$

donde $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ es la deformación cúbica o deformación unitaria de volumen. Para las componentes cortantes se tiene una relación de la forma

$$\tau_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \qquad \tau_{xz} = 2\mu\epsilon_{xz} \qquad \tau_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \tag{4–15}$$

Ambas expresiones pueden escribirse (con la delta de Dirac $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ y 0 en caso contrario y el tensor identidad $\mathbb{I}$ de componentes δ_{ij}) como

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma} = 2\mu\hat{\epsilon} + \lambda\theta\,\mathbb{I} \tag{4–16}$$

Analizando las relaciones anteriores, se observa que, en el caso isótropo, la relación entre las componentes normales del tensor de deformaciones es sólo con las componentes normales del tensor de tensiones, y que la relación entre las componentes cortantes del tensor de deformaciones es sólo con la misma componente cortante del tensor de tensiones. Así, para un cuerpo isótropo, cada una de las tensiones normales da lugar en principio a deformaciones normales distintas de cero en todas las direcciones normales, pero no a deformaciones tangenciales.

Las constantes de Lamé λ y μ así definidas tienen dimensiones de presión como el módulo de Young, las tensiones, o los módulos de rigidez o compresibilidad. Para cuerpos muy rígidos, λ y μ son prácticamente iguales, mientras que cuanto mas plástico es el material menor es μ.

Las constantes elásticas distintas de cero quedan de la forma:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} &= 2\mu + \lambda \\ C_{xxyy} = C_{yyxx} = C_{yyzz} = C_{zzyy} = C_{xxzz} = C_{zzxx} &= \lambda \\ C_{yzyz} = C_{xzxz} = C_{yxyx} = (C_{xxxx} - C_{xxyy}) &= 2\mu \end{aligned} \tag{4–17}$$

siendo cero todas las otras constantes elásticas que no están relacionadas con estas a través de $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}$.

4.3. Isotropía. Coeficientes de elasticidad.

Escribiendo las relaciones anteriores en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \qquad \tau_{xz} = 2\mu\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \qquad \tau_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \qquad \tau_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \end{aligned} \tag{4–18}$$

es posible despejar las deformaciones unitarias. Para ello se utiliza la regla de Cramer quedando para la deformación unitaria según x:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \lambda & \lambda \\ \sigma_{yy} & (\lambda+2\mu) & \lambda \\ \sigma_{zz} & \lambda & (\lambda+2\mu) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{vmatrix}} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}) \tag{4–19}$$

Se definen las cantidades E y Ω en la forma:

$$E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda+2\mu} \qquad \Omega = \frac{2\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda} \tag{4–20}$$

aunque en vez de Ω se acostumbra a usar el cociente:

$$\nu = \frac{E}{\Omega} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{4–21}$$

donde E y ν son respectivamente el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, que ya conocemos. En función de estas magnitudes las expresiones quedan, para el caso isótropo en la forma que ya conocemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right] \end{aligned} \tag{4–22}$$

Al obtener la expresión de la constante de Lamé μ se observa que ésta coincide con el módulo de rigidez, quedando las relaciones entre las constantes de Lamé y E y ν :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{4–23}$$

y los elementos distintos de cero del tensor de las constantes elásticas que aparecían en la ecuación (4–17) como:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} = 2\mu + \lambda &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{xxyy} = C_{yyxx} = C_{yyzz} = C_{zzyy} = C_{xxzz} = C_{zzxx} = \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{yzyz} = C_{xzxz} = C_{yxyx} = (C_{xxxx} - C_{xxyy}) = 2\mu &= \frac{E}{1+\nu} \end{aligned} \quad (4\text{–}24)$$

Recordemos asimismo que, para el caso de tensión hidrostática, se tenía, para la deformación volumétrica:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{K}} \quad (4\text{–}25)$$

donde $\mathcal{K}$ es el módulo de compresibilidad, que tenía la forma:

$$\mathcal{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4\text{–}26)$$

4.4. Energía de deformación.

4.4.1. Medio isótropo

Calculemos el trabajo necesario para deformar un elemento de volumen $dV = dx\,dy\,dz$ de un material elástico isótropo. Como acabamos de ver las tensiones normales están relacionadas únicamente con deformaciones normales y cada una de las tensiones cortantes exclusivamente con su deformación cortante asociada. Así, para calcular la energía total de deformación calcularemos por separado las contribuciones debidas a deformaciones normales y a deformaciones cortantes.

Para las deformaciones normales, utilizando la ecuación (4–16), se tiene para las contribuciones a la energía de los trabajos de deformación en cada dirección

$$\begin{aligned} \delta W_{xx} &= \sigma_{xx}\,dy\,dz\,d\epsilon_{xx}\,dx = 2G\left[\epsilon_{xx} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu}\right] dV\,d\epsilon_{xx} \\ \delta W_{yy} &= \sigma_{yy}\,dx\,dz\,d\epsilon_{yy}\,dy = 2G\left[\epsilon_{yy} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu}\right] dV\,d\epsilon_{yy} \\ \delta W_{zz} &= \sigma_{zz}\,dx\,dy\,d\epsilon_{zz}\,dz = 2G\left[\epsilon_{zz} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu}\right] dV\,d\epsilon_{zz} \end{aligned}$$

que sumados dan

$$\delta W_{normales} = 2G\left[\epsilon_{xx}d\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}d\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}d\epsilon_{zz} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu}d\theta\right] dV,$$

donde se ha tenido en cuenta que $d\theta = d\epsilon_{xx} + d\epsilon_{yy} + d\epsilon_{zz}$ al ser $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$. Integrando la expresión anterior entre que la deformación es nula ($d\epsilon_{ii} = 0$) y que alcanza su valor final ϵ_{ii} se tiene, para el elemento de volumen dV,

$$\delta W_{normales} = G\left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\theta^2\nu}{1-2\nu}\right] dV$$

que da una densidad de energía debida a las deformaciones normales,

$$\mathcal{U}_{normales} = G\left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta^2\right]. \quad (4\text{–}27)$$

Para calcular la contribución de las energías de deformación cortantes, hemos visto que cada una de éstas va por separado, por lo que tendremos

$$\begin{aligned} \delta W_{xy} &= \tau_{xy}dxdz\,d\gamma_{xy}dy = G\gamma_{xy}d\gamma_{xy}\,dV \\ \delta W_{xz} &= \tau_{xz}dxdy\,d\gamma_{xz}dz = G\gamma_{xz}d\gamma_{xz}\,dV \\ \delta W_{yz} &= \tau_{yz}dxdy\,d\gamma_{yz}dz = G\gamma_{yz}d\gamma_{yz}\,dV \end{aligned}$$

que, una vez integradas dan, para la contribución a la energía de las deformaciones cortantes

$$\delta W_{cortantes} = \frac{G}{2}\left[\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right] dV$$

siendo la densidad de energía del medio deformado debida a las deformaciones cortantes,

$$\mathcal{U}_{cortantes} = \frac{G}{2}\left[\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right]. \tag{4–28}$$

La densidad de energía total debida a la deformación queda entonces como

$$\mathcal{U} = G\left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2\right], \tag{4–29}$$

en función de las distintas deformaciones. También se podría haber obtenido la expresión de la densidad de energía en función de las tensiones elásticas, partiendo de p.ej,

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right]$$

o, en general,

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \qquad \Rightarrow \qquad d\epsilon_{ii} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)d\sigma_{ii} - \nu d(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right]$$

que, utilizado en la expresión del cálculo de la energía debida a las deformaciones normales, y sumado a la contribución debida a las deformaciones cortantes, daría

$$\mathcal{U} = \frac{1}{4G}\left[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2\right]. \tag{4–30}$$

donde $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ es la traza del tensor de tensiones.

4.4.2. Caso general

Para tratar el caso general basta con tener en cuenta que, al estar dentro del rango de la elasticidad lineal, si una fuerza F es de la forma $-kx$, el trabajo requerido para un desplazamiento x es $kx^2/2$. Análogamente, la densidad de energía almacenada por unidad de volumen en el elemento deformado (igual al trabajo realizado por las fuerzas eternas por unidad de volumen) es

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \tag{4–31}$$

en función de las componentes del tensor elástico.

Apéndice A
Tensores.

Obviamente, la orientación del sistema de ejes cartesianos en el que describiremos nuestros problemas físicos puede ser escogida en forma arbitraria, aunque nos sea más cómodo trabajar en unos sistemas de ejes que en otros. En tanto se trate sistemas de ejes rotados uno respecto del otro con una orientación relativa fija, las propiedades y leyes físicas deben mantenerse igual, ya que no pueden depender del sistema de ejes coordenados escogido.

Para que esto sea así, las componentes que describen el valor de esas magnitudes físicas en un sistema de referencia o en otro rotado deben transformarse de una forma determinada y no de otra. De este modo, un *tensor* estaría formado por un conjunto de cantidades que tienen ciertas propiedades de transformación bajo un cambio de base por rotación, resultando éstas en una invariancia formal de las leyes físicas que se siguen cumpliendo de la misma forma en la nueva base. Desde un punto de vista matemático un tensor sería una aplicación multilineal (lineal en cada uno de sus argumentos), pero nos bastará nuestra definición inicial para empezar a trabajar con tensores y ver la relación entre las componentes de la magnitud física expresadas en un sistema de referencia ortonormal xyz y las que tendría en otro sistema de referencia ortonormal XYZ rotado respecto del anterior. Antes de ello, veremos cómo caracterizar un cambio de sistema de ejes por rotación.

A.1. Rotación de un sistema de ejes.

Comenzaremos estudiando la relación entre los vectores unitarios cartesianos en uno y otro sistema de referencia. En función de los vectores unitarios del sistema xyz, el vector unitario $\vec{u}_X$ a lo largo del eje X del sistema rotado se escribe como

$$\vec{u}_X = (\vec{u}_X\vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{u}_X\vec{u}_y)\vec{u}_y + (\vec{u}_X\vec{u}_z)\vec{u}_z$$

donde $\vec{u}_X\vec{u}_x$ representa la proyección del vector unitario $\vec{u}_X$ en la dirección dada por el vector unitario $\vec{u}_x$, es decir, la componente de $\vec{u}_X$ según $\vec{u}_x$, $\vec{u}_X\vec{u}_y$ su componente según $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_X\vec{u}_z$ su componente según $\vec{u}_z$. Como todos ellos son vectores unitarios, cada una de estas componentes no es más que el coseno del ángulo que forman los dos vectores unitarios, que a su vez es uno de los *cosenos directores* del vector unitario $\vec{u}_X$ en el sistema de referencia xyz. Análogamente los vectores unitarios $\vec{u}_Y$ y $\vec{u}_Z$ se escriben, en función de los vectores unitarios del sistema xyz, como

$$\vec{u}_Y = (\vec{u}_Y\vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{u}_Y\vec{u}_y)\vec{u}_y + (\vec{u}_Y\vec{u}_z)\vec{u}_z$$
$$\vec{u}_Z = (\vec{u}_Z\vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{u}_Z\vec{u}_y)\vec{u}_y + (\vec{u}_Z\vec{u}_z)\vec{u}_z$$

Si denominamos α_{ij} al coseno del ángulo formado por el eje i del sistema de ejes rotado y el eje j del sistema de ejes sin rotar ($\vec{u}_i^{XYZ} \cdot \vec{u}_j^{xyz}$), podemos resumir todo esto en la tabla (cuyas columnas también valen para obtener $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_z$)

	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_X$	α_{xx}	α_{xy}	α_{xz}
$\vec{u}_Y$	α_{yx}	α_{yy}	α_{yz}
$\vec{u}_Z$	α_{zx}	α_{zy}	α_{zz}

que nos da la matriz de rotación

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \alpha_{ij} \equiv \alpha_{Ij} = \vec{u}_i^{XYZ}\vec{u}_j^{xyz} \tag{A–1}$$

En lo sucesivo utilizaremos indistintamente las notaciones xyz o 123 para denominar los sistemas de ejes y etiquetar las componentes de vectores, tensores de segundo orden y matrices de rotación.

No todos los α_{ij} son independientes entre sí. Por ejemplo, para una rotación en uno de los planos coordenados, el coseno director de un eje i respecto de un eje j es exactamente menos el del eje j respecto del eje i, ya que un ángulo es 180 grados menos el otro (véase el pie de la figura A–2), lo que hace que el coseno cambie de signo y la matriz de rotación quede antisimétrica en este caso. Sin embargo en el caso más general la matriz de rotación no será ni siquiera antisimétrica, aunque sólo tendrá 3 componentes independientes.

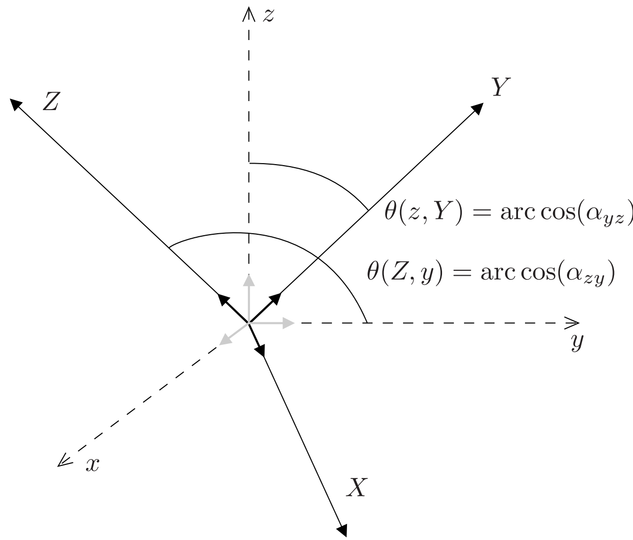
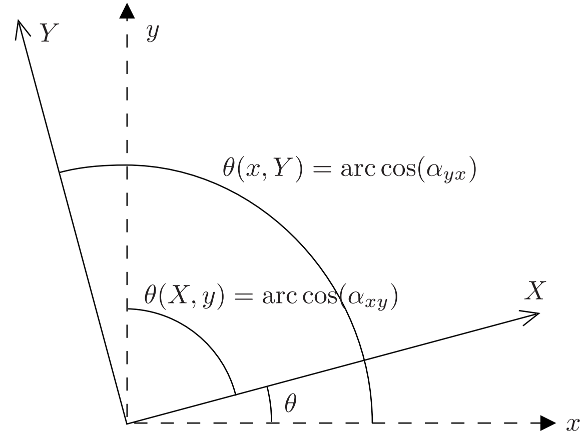


Figura A–1: Rotación de un sistema de ejes. Los cosenos de los ángulos formados por cada uno de los distintos pares de ejes nuevo y antiguo dan los coeficientes que permiten expresar los vectores unitarios de un sistema de coordenadas en función de los vectores unitarios del otro.



$$\mathcal{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura A–2: Para una rotación en el plano de la figura, donde se gira un ángulo θ alrededor del eje z en sentido positivo, $\theta(X, y)$ es $90 - \theta$ mientras que $\theta(x, Y)$ es $90 + \theta$. Sumando ambas expresiones se observa que $\theta(x, Y) = 180 - \theta(X, y)$ y por lo tanto, sus cosenos serán iguales y de signo contrario, como se ve en la matriz de rotación para este caso. Sin embargo, para una rotación genérica en el espacio la matriz de rotación no será antisimétrica.

La matriz de rotación es una matriz unitaria (su determinante es la unidad) de componentes reales y su inversa es su transpuesta,

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \alpha_{ij} = \vec{u}_i \vec{u}_j \quad \begin{cases} i : \text{sistema rotado} \\ j : \text{sistema sin rotar.} \end{cases} \tag{A–2}$$

La matriz de rotación y sus componentes únicamente dependen de cuáles son los sistemas de ejes que relaciona, y en ningún caso del sistema de ejes desde el que estamos observando la transformación.

A.2. Tensores de orden cero. Escalares.

Un escalar es un ejemplo de tensor del rango más simple. Cuando una propiedad física está representada por un escalar, el valor de éste no depende del sistema de ejes coordenados utilizado. Por ejemplo, la temperatura de un sólido en un punto no depende de si tomamos los ejes del sólido de una forma o de si rotamos estos ejes.

A.3. Tensores de orden uno. Vectores.

Un tensor de primer orden se representa por un vector. Cuando una magnitud física es de carácter vectorial, su módulo no depende de la orientación escogida para los ejes coordenados, pero sí sus componentes según estos ejes. Así, el módulo del vector es un invariante frente a la rotación, aunque sus componentes cambien. Si denominamos (v_x, v_y, v_z) a las componentes del vector en el sistema de ejes coordenados xyz y (v_X, v_Y, v_Z) a las componentes del mismo vector en otro sistema de ejes coordenados XYZ rotado respecto del anterior, en ambos casos tenemos el mismo vector, pero con distintas componentes, dependiendo del sistema de ejes en el que lo representamos

$$\vec{v}_{xyz} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z = \vec{v}_{XYZ} = v_X \vec{u}_X + v_Y \vec{u}_Y + v_Z \vec{u}_Z.$$

Si multiplicamos por el vector unitario $\vec{u}_X$ se tiene

$$v_X = (\vec{u}_x \vec{u}_X) v_x + (\vec{u}_y \vec{u}_X) v_y + (\vec{u}_z \vec{u}_X) v_z = v_x \cos(xX) + v_y \cos(yX) + v_z \cos(zX) = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{xy} v_y + \alpha_{xz} v_z$$

al ser ortonormales entre sí los vectores unitarios de un sistema de ejes.

Un tratamiento análogo puede realizarse para las demás componentes multiplicando por $\vec{u}_Y$ y $\vec{u}_Z$. Escrito en forma matricial, el resultado queda como:

$$\begin{aligned}(v_X, v_Y, v_Z) &= \begin{pmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & \alpha_{Xz} \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & \alpha_{Yz} \\ \alpha_{Zx} & \alpha_{Zy} & \alpha_{Zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A–3}$$

o escrito en forma más compacta:

$$\vec{v}_{XYZ} = \mathcal{R} \cdot \vec{v}_{xyz} = [\alpha_{ij}]\, \vec{v}_{xyz} \qquad \text{o} \qquad \vec{v}\,' = \mathcal{R} \cdot \vec{v} = [\alpha_{ij}]\, \vec{v} \qquad \text{o} \qquad v_i' = \sum_p \alpha_{ip} v_p \tag{A–4}$$

donde $\mathcal{R}$ es la matriz de rotación cuyas componentes son $\alpha_{ij} = \cos(r_i\text{O}r_j) = \cos(\vec{u}_i^{XYZ}\vec{u}_j^{xyz}) = \vec{u}_i^{XYZ} \cdot \vec{u}_j^{xyz}$. En la expresión anterior hemos utilizado la notación con prima para denominar al vector expresado en el sistema de referencia XYZ. Ésta también es una notación frecuente, pero debe recordarse que en ambos casos se trata del mismo vector, pero con componentes expresadas en distintos sistemas de referencia.

A.4. Tensores de segundo orden. Representación matricial.

A.4.1. Transformación de un tensor de segundo orden frente a la rotación de ejes.

Consideremos ahora una propiedad física descrita por un tensor de segundo orden, representado por una matriz, como es el caso de la conductividad térmica, eléctrica o hidráulica en el caso general. En estos casos, el tensor (al que denominaremos por ejemplo $\hat{T}$) aparece en una expresión de la forma $\hat{T} \cdot \vec{p} = \vec{q}$, donde $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son dos vectores relacionados entre sí a través del operador $\hat{T}$, todos ellos expresados en un sistema de referencia Or. Visto desde un sistema de ejes Or', relacionado con el anterior a través de una matriz de rotación $\mathcal{R}$, esta expresión queda en la forma $T' \cdot \vec{p}\,' = \vec{q}\,'$. Si en la primera expresión introducimos la matriz de rotación multiplicada por su inversa, ésta deberá seguir siendo válida:

$$\hat{T} \cdot \vec{p} = \vec{q} = \hat{T} \cdot \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathcal{R}\vec{p} \tag{A–5}$$

Si ahora rotamos este vector, se tiene:

$$\mathcal{R} \cdot \vec{q} = \mathcal{R} \cdot \hat{T} \cdot \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathcal{R} \cdot \vec{p} \tag{A–6}$$

Ahora bien, $\mathcal{R} \cdot \vec{q} = \vec{q}\,'$ y $\mathcal{R} \cdot \vec{p} = \vec{p}\,'$, por lo que para que ambas expresiones sean equivalentes, cada una en su sistema de referencia, deberá cumplirse:

$$\mathcal{R} \cdot \hat{T} \cdot \mathcal{R}^{-1} = \hat{T}' \tag{A–7}$$

que es la forma en que se transforman las componentes de un tensor de segundo rango frente a la rotación,

$$T'_{ij} = \sum_{pq} \alpha_{ip}\alpha_{jq}T_{pq}.$$

Es decir, si se tiene un conjunto de nueve cantidades dispuesto con un cierto orden en una matriz 3×3, para comprobar si éstas son las componentes de un tensor de segundo orden será suficiente comprobar si relacionan dos vectores (cuyas componentes se transforman como las componentes de un tensor de primer orden). Esto ocurrirá siempre que los dos vectores representen propiedades físicas reales, ya que éstas se transforman de esta forma.

A.4.2. Ecuación de autovalores.

Se denominan *ejes principales*, *vectores principales*, o *autovectores* de un tensor al sistema de ejes coordenados en el cual el tensor tiene forma diagonal. En el sistema de ejes principales, Or^{ep}, los ejes propios del tensor son obviamente $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y como en este sistema de ejes el tensor es diagonal, claramente se cumple, para el vector propio $\vec{v}_p^{ep}$ en el sistema de ejes principales ep:

$$\hat{T}^{ep} \cdot \vec{v}_p^{ep} = \lambda \vec{v}_p^{ep} \tag{A–8}$$

denominándose a λ *autovalor*, *valor propio* o *valor principal* de $\hat{T}$ con el autovector $\vec{v}_p^{ep}$. Aquí utilizamos el subíndice p para denotar que nos referimos al vector principal (o propio) y el superíndice ep para denotar que nos encontramos en el sistema de coordenadas principales. Al ser $\hat{T}$ un tensor, esta ecuación debe ser cierta en cualquier sistema de ejes. Lo podemos comprobar de forma sencilla, considerando otro sistema de ejes que se encuentra rotado respecto del anterior con una rotación caracterizada por una matriz de rotación $\mathcal{R}$, si hacemos:

$$\mathcal{R} \cdot \hat{T}^{ep} \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathcal{R} \vec{v}_p^{ep} = \lambda \cdot \mathcal{R} \cdot \vec{v}_p^{ep}$$

Esto da la misma expresión anterior (A–8) pero en el nuevo sistema de ejes coordenados:

$$\hat{T} \cdot \vec{v}_p = \lambda \cdot \vec{v}_p \tag{A–9}$$

Así, cuando un vector $\vec{v}_p$ está dirigido según una dirección principal, el vector resultante de aplicar $\hat{T}$ sobre el vector $\vec{v}_p$ es proporcional al mismo, con independencia de la orientación del sistema de referencia respecto del que se representan $\hat{T}$ y $\vec{v}_p$ (pero con ambos expresados respecto del mismo sistema). Pasando todo al primer miembro, la *ecuación de autovalores* queda:

$$(\hat{T} - \lambda \mathbb{I}) \vec{v}_p = 0 \tag{A–10}$$

donde $\mathbb{I}$ representa la matriz identidad $\mathbb{I}_{ij} = \delta_{ij}$. Al ser $\vec{v}$ un vector no nulo, debe cumplirse que el determinante de $(T - \lambda \mathbb{I})$ es cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{A–11}$$

A.4.3. Autovalores y autovectores reales para los tensores simétricos de segundo orden.

Se dice que un tensor de segundo orden es *simétrico* si sus componentes satisfacen la condición $T_{ij} = T_{ji}$. La mayor parte de los tensores de segundo orden que describen propiedades físicas son simétricos (una excepción es p.ej. el tensor termoeléctrico). Un tensor de segundo orden es *antisimétrico* si sus componentes cumplen la condición $T_{ij} = -T_{ji}$.

Para un tensor simétrico de segundo orden, existe siempre un sistema de ejes real en el cual el tensor toma la forma diagonal, con las tres componentes reales. Si no es simétrico aparecerían valores complejos. Como hemos visto, a los ejes de este sistema se les denomina *direcciones* o *ejes principales* y a los elementos diagonales del tensor en este sistema de ejes *valores propios* o *valores principales* del mismo. Cuando alguno de éstos está repetido se dice que hay degeneración.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \to \mathcal{R} \to \begin{pmatrix} T'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \tag{A–12}$$

Las propiedades de invariancia bajo rotación del sistema de ejes que obtenemos a continuación las referimos a un tensor simétrico de segundo orden, ya que si no, los ejes principales del tensor no serían en general ejes reales. Sin embargo también se satisfarían con los valores complejos que se tendrían en el caso de un tensor no simétrico, frente a rotaciones en ejes reales.

A.4.4. Invariantes bajo rotación de un tensor de segundo orden.

Para un tensor genérico de segundo orden, la ecuación de autovalores (A–11) queda como:

$$\begin{aligned} &-\lambda^3 + (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 - \\ &-(T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}T_{32} - T_{13}T_{31} - T_{12}T_{21})\lambda + \Delta = 0 \end{aligned} \tag{A–13}$$

que, para el caso de un tensor simétrico, pasa a ser

$$\begin{aligned} &-\lambda^3 + (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 - \\ &-(T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}^2 - T_{13}^2 - T_{12}^2)\lambda + \Delta = 0 \end{aligned} \tag{A–14}$$

de soluciones $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \equiv T_1, T_2, T_3$, todas ellas reales. En la ecuación anterior se ha utilizado Δ para el determinante de $|T_{ij}|$, que para un tensor genérico de segundo orden como $[T_{ij}]$ tiene la forma general.

$$\Delta = T_{11}T_{22}T_{33} + T_{12}T_{13}T_{31} + T_{21}T_{32}T_{13} - T_{13}T_{22}T_{31} - T_{12}T_{21}T_{33} - T_{32}T_{23}T_{11} \tag{A–15}$$

Si el sistema de ejes está dirigido a lo largo de las direcciones principales, los elementos de fuera de la diagonal son todos nulos, y el determinante queda $\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = T_1T_2T_3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\equiv T_1, T_2, T_3)$ son los valores propios del tensor obtenidos a partir de la ecuación de autovalores (A–11).

Las soluciones λ_i de la ecuación (A–14) no dependen del sistema de referencia, y por lo tanto, los coeficientes de λ en dicha ecuación tampoco pueden depender del sistema de referencia. Se dice que son invariantes frente a la rotación. Se denomina *traza* a la suma de los elementos de la diagonal. En un tensor simétrico de segundo orden, la traza o *invariante de primer orden* es un invariante frente a la rotación, es decir:

$$I_1 \equiv \sum_i T_{ii} = \sum_i T'_{ii} \tag{A–16}$$

Existen además otros dos invariantes para un tensor simétrico de segundo orden, el denominado *invariante de segundo orden*,

$$\begin{aligned} -I_2 &= -(T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}T_{32} - T_{13}T_{31} - T_{12}T_{21}) \\ &= -(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) \end{aligned} \tag{A–17}$$

que también puede escribirse como la suma de los menores complementarios de los elementos de la diagonal,

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{13} \\ T_{31} & T_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \tag{A–18}$$

y el *determinante* o *invariante de tercer orden*,

$$I_3 = \Delta = T_1T_2T_3 \tag{A–19}$$

correspondientes a los coeficientes de los términos lineal en λ e independiente. Todos ellos permanecen invariantes bajo rotación del sistema de ejes.

A.4.5. Rotación de ejes en un plano principal: el círculo de Mohr.

El círculo de Mohr constituye una representación gráfica muy sencilla y útil para estudiar el cambio de las componentes de un tensor de segundo orden cuando se produce una rotación del sistema de ejes en uno de los planos principales.

Consideremos de partida un determinado tensor de segundo orden en su correspondiente sistema de ejes principales, con valores principales σ_1, σ_2 y σ_3, ordenados de menor a mayor.

$$\hat{T}^{ep} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{A–20}$$

Si se produce una rotación de ejes en uno de los planos principales, por ejemplo, el plano xy (rotación alrededor del eje z) caracterizada por una matriz de rotación

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A–21}$$

las componentes del tensor se transformarán bajo la rotación como $\mathcal{R}\hat{T}\mathcal{R}^{-1}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que desarrollado queda

$$\hat{T}' = \mathcal{R}\hat{T}^{ep}\mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1\cos^2\theta + \sigma_2\operatorname{sen}^2\theta & -\sigma_1\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & 0 \\ -\sigma_1\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \sigma_1\operatorname{sen}^2\theta + \sigma_2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{A–22}$$

Es decir las componentes diagonales σ_{11} y σ_{22} del tensor en el nuevo sistema de ejes son

$$\sigma_{11} = \sigma_1\cos^2\theta + \sigma_2\operatorname{sen}^2\theta \tag{A–23a}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_1\operatorname{sen}^2\theta + \sigma_2\cos^2\theta \tag{A–23b}$$

y las no diagonales τ_{12} (iguales a τ_{21} para un tensor simétrico) quedan

$$\tau_{12} = -\sigma_1 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \sigma_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{A–23c}$$

Demos a estas expresiones unos pequeños retoques. Por ejemplo a la (A–23a),

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \operatorname{sen}^2\theta = \\
&\frac{\sigma_1}{2}(\cos^2\theta + \cos^2\theta) + \frac{\sigma_2}{2}(\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \\
&\frac{\sigma_1}{2}(\cos^2\theta + 1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{\sigma_2}{2}(\operatorname{sen}^2\theta + 1 - \cos^2\theta) = \\
&\frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1}{2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - \frac{\sigma_2}{2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)
\end{aligned}$$

Con retoques similares en la ecuación (A–23b) y recordando que $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ se pueden reescribir las ecuaciones anteriores como

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\cos 2\theta \tag{A–24a}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\cos 2\theta \tag{A–24b}$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\operatorname{sen} 2\theta \tag{A–24c}$$

Pero esta es la ecuación paramétrica de una circunferencia centrada en el punto $\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$ y de radio $\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$, como la que se muestra en la figura A–3 y a la que se denomina *círculo de Mohr*.

Esto mismo se podría haber hecho para cualquiera de los otros dos planos principales, teniéndose distintos círculos de Mohr para cada plano principal como se muestra en la figura A–4.

El círculo de Mohr permite obtener de forma muy sencilla las componentes de un tensor cuando se produce una rotación de un ángulo θ en un plano principal. Para ello, si el ángulo realmente girado es θ, giramos 2θ el segmento AB en torno al origen del círculo de Mohr. Los puntos de corte de este segmento con el círculo de Mohr dan las componentes del tensor para este giro. Así, las proyecciones de estos puntos sobre el eje horizontal dan las componentes diagonales transformadas, σ_{11} y σ_{22} mientras que la proyección sobre el eje vertical del punto B da la componente no diagonal transformada, de acuerdo con las ecuaciones (A–24). En cada uno de los planos principales el máximo valor de la componente no diagonal tendrá lugar cuando AB esté vertical, es decir, cuando $\theta = 45°$ que dará $2\theta = 90°$. Obviamente, como se ve en la figura A–4 el máximo valor no diagonal tendrá lugar en el plano en el cual los valores principales correspondientes estén más separados entre sí, en el caso de la figura, el plano $\boxed{13}$, a $45°$ de los ejes principales girando en torno al otro eje principal.

El círculo de Mohr también permite, una vez conocido que el sistema está en uno de sus planos principales, obtener valores y direcciones principales a partir de cálculos trigonométricos sencillos

A.4.6. La superficie indicadora o forma cuadrática asociada a un tensor simétrico de segundo orden

Una *forma cuadrática* es una generalización del producto escalar de dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ a través de un tensor de segundo orden T_{ij},

$$\vec{p}\hat{T}\vec{q} = \sum_{ij} p_i T_{ij} q_j = 1$$

Consideremos una matriz T_{ij} de nueve componentes a la que aplicamos dos vectores posición por la izquierda y por la derecha de forma que el resultado sea la unidad,

$$\sum_{ij} T_{ij} r_i r_j = 1 = (r_1, r_2, r_3)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

que desarrollado queda

$$T_{11}r_1^2 + T_{12}r_1r_2 + T_{13}r_1r_3 + T_{21}r_2r_1 + T_{22}r_2^2 + T_{23}r_2r_3 + T_{31}r_3^2 + T_{32}r_3r_2 + T_{33}r_3^2 = 1.$$

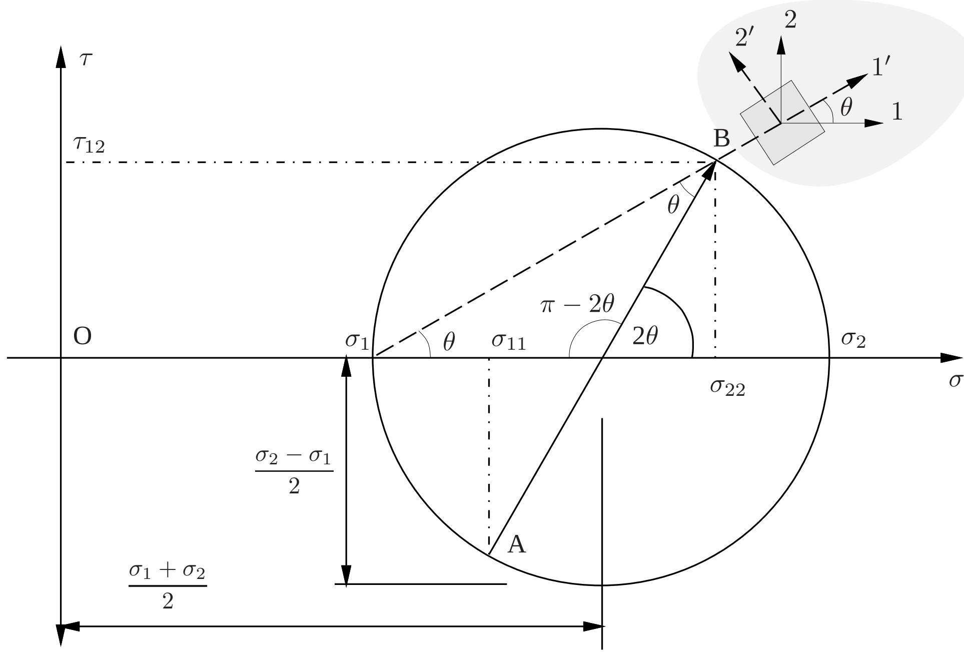


Figura A–3: Círculo de Mohr en un plano principal. Nótese que la rotación en el círculo de Mohr, 2θ es el doble de la rotación θ en el sistema de ejes real. Los sentidos de ambas rotaciones son idénticos, positivo como se muestra en la figura.

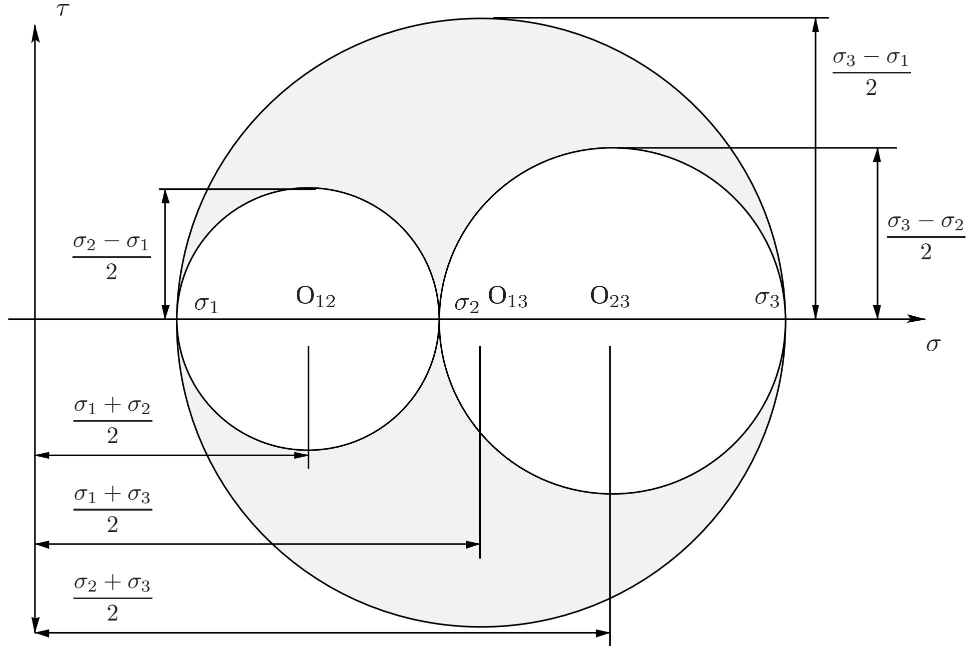


Figura A–4: Círculo de Mohr en los tres planos principales. El máximo valor posible de las componente no diagonales se produce en el plano principal correspondiente a los autovalores extremos.

Si consideramos el caso de una matriz simétrica, $T_{ij} = T_{ji}$, esta suma puede escribirse como

$$T_{11}r_1^2 + T_{22}r_2^2 + T_{33}r_3^2 + 2T_{13}r_1r_3 + 2T_{23}r_2r_3 + 2T_{23}r_2r_3 = 1,$$

que es la ecuación de una superficie de segundo orden (una cuádrica) centrada en el origen y que puede ser bien un elipsoide o bien un hiperboloide, según los signos de T_1, T_2 y T_3.

Si ahora transformamos las componentes de los vectores $\vec{r}$ mediante una rotación del sistema de ejes dada por una matriz de rotación $\mathcal{R} = [\alpha_{ij}]$, se tiene $r_i = \sum_k \alpha_{ki} r'_k$ y $r_j = \sum_l \alpha_{lj} r'_l$ (nótese que es la transformación inversa), y la ecuación de la forma cuadrática queda como

$$\sum_{ijkl} T_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj} r'_k r'_l = 1 = \sum_{kl} T'_{kl} r'_k r'_l \qquad \text{con} \qquad T'_{kl} = \sum_{ij} \alpha_{ki}\alpha_{lj} T_{ij}$$

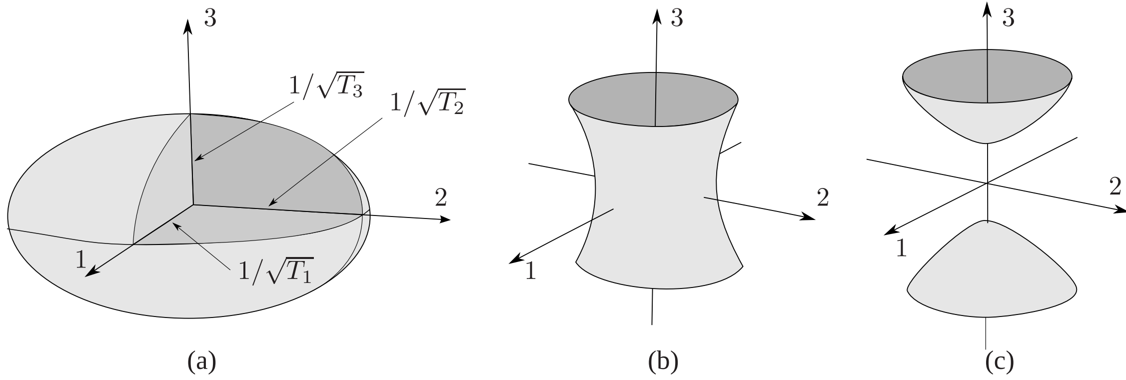


Figura A–5: Distintos tipos de cuádricas. Cuando T_1, T_2 y T_3 son positivos se tiene el elipsoide de (a), cuando dos son positivos y uno negativo (en el caso concreto de la figura, el negativo es T_3) se obtiene un hiperboloide de una hoja como (b) y si dos son negativos y uno positivo (en el caso de la figura, el positivo es T_3) un hiperboloide de dos hojas como en (c).

que coincide con la forma en que se transforman las componentes de un tensor simétrico de segundo orden. De esta forma vemos que para ver cómo se transforman las componentes de un tensor bajo rotación del sistema de ejes basta con ver como se transforma la correspondiente cuádrica.

Una superficie cuádrica de esta forma tiene ejes principales, es decir, unos ejes en los que la cuádrica se representa como

$$T_1 r_1^2 + T_2 r_2^2 + T_3 r_3^2 = 1$$

donde los T_i son los valores principales del tensor correspondiente. Si comparamos con la ecuación general de una cuádrica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

vemos que los semiejes correspondientes son precisamente $1/\sqrt{T_1}$, $1/\sqrt{T_2}$ y $1/\sqrt{T_3}$.

Si los tres valores T_1, T_2 y T_3 son positivos la superficie es un elipsoide real, y si los tres son negativos tendremos un elipsoide imaginario. Si dos de los valores son positivos y uno negativo la cuádrica es un hiperboloide de una hoja y si uno es positivo y dos negativos es un hiperboloide de dos hojas como se ve en la figura A–5.

Veamos una propiedad interesante basada en las características de una elipse,

> Si T_{ij} son las componentes de un tensor simétrico de segundo orden que relaciona los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ en la forma $\vec{p} = \hat{T}\vec{q}$ (y por tanto, $p_i = \sum_j T_{ij} q_j$) la dirección de $\vec{p}$ para un $\vec{q}$ dado puede obtenerse dibujando el vector posición $\vec{r}$ de un punto Q de la cuádrica tal que $\vec{r}$ sea paralelo a $\vec{q}$ y encontrando la normal a la cuádrica en Q.

Para demostrar esto partimos del tensor $\hat{T}$ en ejes principales. El vector $\vec{u}_q$ tiene componentes (u_1, u_2, u_3) y, si OQ tiene longitud r, el vector posición de Q, $\vec{r}$ tendrá como coordenadas $r(u_1, u_2, u_3) = (r_1, r_2, r_3)$. Como Q está en la superficie sus coordenadas cumplirán $T_1 r_1^2 + T_2 r_2^2 + T_3 r_3^2$.

En una cuádrica, si los cosenos directores del vector posición de un punto de la misma desde el origen son (u_1, u_2, u_3) el vector $(u_1 T_1, u_2 T_2, u_3 T_3)$ es normal a la superficie de la cuádrica en ese punto. Como

$$\vec{p} = [T_{ij}]\vec{q} = q(u_1 T_1, u_2 T_2, u_3 T_3)$$

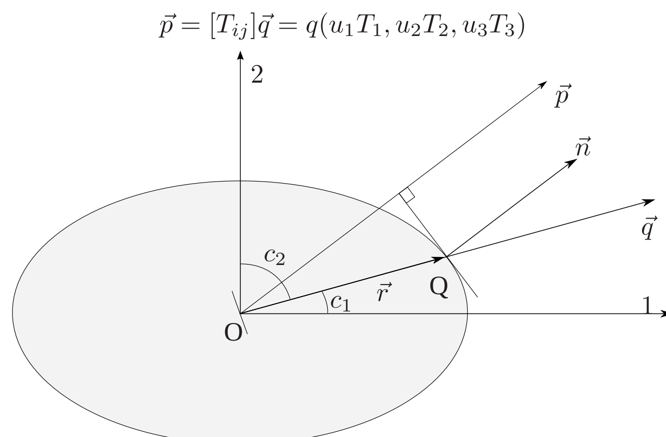


Figura A–6: Forma cuadrática asociada al tensor de tensiones.

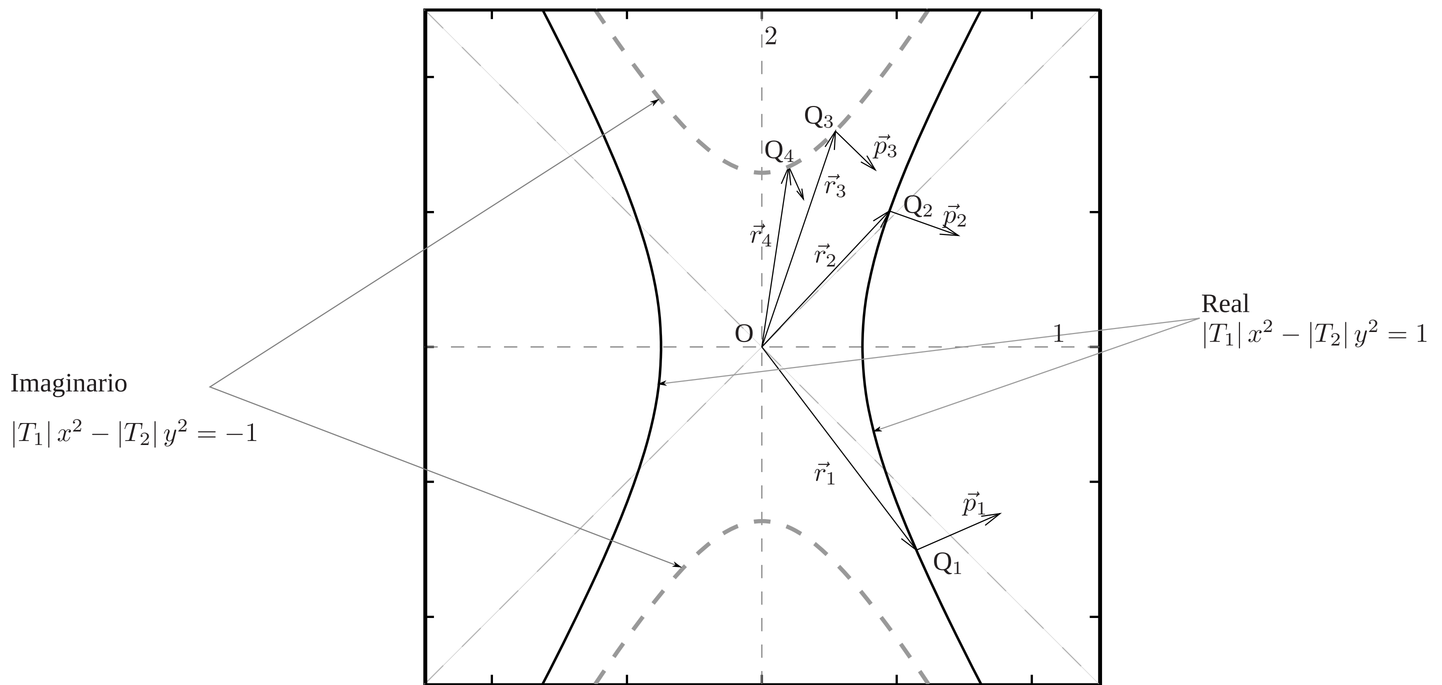


Figura A–7: Trabajando con un hiperboloide real e imaginario en el plano 12 cuando $T_1 > 0$ y $T_2 < 0$. El hiperboloide correspondiente es el marcado en negro y cuando la dirección deseada lo corta se procede como de costumbre. Cuando la dirección deseada no pasa por el hiperboloide real es necesario trabajar con el hiperboloide imaginario complementario (en gris y a trazos), de forma que se busca el punto de corte, se traza la normal y se le da a ésta el sentido contrario que en el caso del hiperboloide real.

$\vec{p}$ deberá será normal a la superficie en ese punto.

Esto se ve muy claro en el caso de un elipsoide real, pero si tenemos los tres valores negativos lo que tendremos en realidad es un elipsoide imaginario. En la práctica esto no añade gran complicación, se trabaja con el elipsoide real que correspondería al (a) cambiado de signo ($T_1x^2 + T_2y^2 + T_3z^2 = -1$, que sería un elipsoide real al ser $T_1, T_2, T_3 < 0$) y se cambiaría de signo el resultado, que apuntaría en el sentido contrario, hacia dentro del elipsoide.

Asimismo, cuando tenemos hiperboloides, de una o dos caras, hay direcciones en las que el radio vector no corta el hiperboloide real, por ejemplo, si en la figura A–5-(b) la dirección es próxima al eje 3, o si en la figura A–5-(c) es próxima al plano 12. En estas direcciones, el punto de corte sería imaginario, pero para trabajar con él utilizaríamos el hiperboloide real complementario (el que se obtendría cambiando de signo al 1, por ejemplo en la figura A–5 (b) y (c) serían complementarios) y trabajaríamos con él en esta zona, invirtiendo el sentido del resultado. Para mayor claridad esto se representa en la figura A–7, para el caso de un tensor plano con $T_1 > 0$ y $T_2 < 0$.

A.5. *Tensores de orden superior.*

Además de los tensores que hemos visto hasta ahora, pueden aparecer tensores de orden superior en las leyes de la Física. Por ejemplo, el *tensor piezoeléctrico* es un tensor de orden 3 que relaciona un vector (la polarización) con un tensor (el tensor de tensiones) en la forma

$$[P_i] = [d_{ijk}][\sigma_{jk}].$$

Las 27 componentes de éste tensor de orden tres se transformarían, bajo rotación del sistema de ejes, en la forma

$$d'_{ijk} = \sum_{pqr} \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}d_{pqr}$$

la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones viene dada a través de un tensor de orden 4, el *tensor de las constantes elásticas*,

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ijkl}][\epsilon_{kl}]$$

que tendría 81 componentes (afortunadamente ni mucho menos son todas independientes) que se transformarían en la forma

$$C'_{ijkl} = \sum_{pqrs} \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}C_{pqrs}.$$

Apéndice B

La función de Airy para un estado de tensión plana.

Resolver un problema elástico con condiciones de contorno es muy difícil en el caso general, y de hecho durante muchos años, algunos grandes matemáticos han trabajado en el análisis de los problemas con condiciones de contorno. Se han desarrollado una serie de técnicas, algunas muy elegantes, y aunque ninguna de ellas es completamente general, han permitido obtener una información preciosa sobre el comportamiento de los materiales deformables. En la actualidad, este tipo de problemas se suelen abordar de forma numérica mediante cálculos de elementos finitos, pero algunas de las soluciones exactas y los métodos para obtenerlas siguen siendo importantes.

La dificultad de un cálculo exacto estriba en que, cuando se quiere resolver un problema general en elasticidad lineal, incluso en el caso más simple de medios isótropos, es necesario tener en cuenta las ecuaciones de equilibrio (2–3), las definiciones de las componentes del tensor de deformaciones en función del desplazamiento (3–14) y las relaciones tensión deformación para un medio isótropo dadas por (4–22), sin contar con la posibilidad de que simultáneamente se produzca expansión térmica, todo ello basado en el conocimiento que tenemos de lo que ocurre en los límites del material tensionado. Esto implica ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las que intervienen vectores y tensores, lo que en la práctica multiplica el número de ecuaciones.

Una posible aproximación para intentar simplificar el número de ecuaciones involucradas consistiría en intentar reducirlas a una única ecuación diferencial en derivadas parciales para una función escalar, de la que se derivarían las tensiones y deformaciones. Esto no puede hacerse para el caso general de tres dimensiones, pero la función de Airy permitirá hacerlo en el caso de un estado de tensión plana.

Supongamos un estado de tensión plano, en el que p.ej., las caras z están libres de tensiones ($\sigma_{zi} = 0$, para $i = x, y, z$). En estas condiciones las ecuaciones de equilibrio (2–3) que deben cumplir las tensiones elásticas se quedan en

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y = 0.$$

Como una forma de simplificar la búsqueda de funciones cuyas derivadas satisfagan las ecuaciones anteriores, G.B. Airy definió una función escalar de tensión $\phi(x, y)$ a partir de la cual se pueden obtener las componentes del tensor de tensiones en la forma

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \Omega \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{aligned} \qquad \text{(B–1)}$$

que, como puede comprobarse por sustitución, satisface las ecuaciones de equilibrio si la fuerza de masa admite un potencial[†] de forma que Ω cumpla

$$\rho g_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \rho g_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \qquad \text{(B–2)}$$

donde g_x y g_y representan componentes de la aceleración debida a fuerzas de masa y por tanto, ρg_x y ρg_y son las componentes de la fuerza por unidad de volumen. Se denomina a la función $\phi(x, y)$ *función de Airy* o *función de tensión de Airy*. Nótese que si la fuerza de masa admite un potencial, pero no se satisface (B–2) no es posible definir una función de Airy. Afortunadamente, para el caso de la fuerza gravitatoria la ecuación (B–2) se satisface con (g_x, g_y) las componentes de la aceleración gravitatoria en el sistema de ejes considerado, quedando la densidad de energía potencial Ω en la forma

$$\Omega = -\rho x g_x - \rho y g_y. \qquad \text{(B–3)}$$

[†] Aquí Ω sería realmente una energía potencial por unidad de volumen, una densidad de energía potencial.

Consideremos ahora la condición de compatibilidad (3–19a) y las relaciones (4–22) entre tensiones y deformaciones para un medio isótropo. Sustituyendo los valores de las deformaciones dados por (4–22) en (3–19a) y particularizando al caso de estado plano de tensiones, se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

de forma que las tensiones que satisfacen esta relación garantizan la continuidad de la deformación. Si sustituimos en esta ecuación los valores dados en (B–1) se tiene

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \equiv \nabla^2(\nabla^2\phi) = \nabla^4\phi. \tag{B–4}$$

Así, toda función $\phi(x, y)$ que satisfaga esta ecuación cumplirá automáticamente las condiciones de equilibrio, de compatibilidad y las relaciones de la elasticidad lineal para un medio isótropo. Hay muchas funciones que satisfacen la ecuación anterior, pero para que sea solución del problema objeto de estudio es necesario además que satisfaga las condiciones de contorno de tensión y deformación en los límites del medio deformado, lo que complica mucho las cosas. Puede demostrarse que si se encuentra una solución que satisfaga simultáneamente las ecuaciones de compatibilidad y las condiciones de contorno, ésta es única y por tanto es la solución correcta.

La función de Airy puede utilizarse únicamente en el caso de tensión bidimensional y cuando la fuerza de masa admite un potencial en la forma mostrada en la ecuación (B–2).

B.1. Función de Airy para un voladizo de sección rectangular sometido a su propio peso

Consideremos el caso de un voladizo de sección rectangular para ofrecer un ejemplo de obtención de la función de Airy. Partiremos de un desarrollo polinómico de quinto orden en x e y, tomadas como se indica en la figura B–1,

$$\begin{aligned}\phi(x, y) = A_{50}x^5 + A_{41}x^4y + A_{32}x^3y^2 + A_{23}x^2y^3 + A_{14}xy^4 + A_{05}y^5 +\\ +A_{40}x^4 + A_{31}x^3y + A_{22}x^2y^2 + A_{13}xy^3 + A_{04}y^4 +\\ +A_{30}x^3 + A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{03}y^3 +\\ +A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2\end{aligned} \tag{B–5}$$

y tendremos en cuanta que las aceleraciones debidas a fuerzas de masa son $g_x = 0$ y $g_y = g$ (nótese que el eje y apunta hacia abajo). Así, a partir del desarrollo anterior, las expresiones (B–1) nos dan para σ_{xx}, σ_{yy} y τ_{xy}

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = {} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y = \\ & 2A_{32}x^2 + 6A_{23}x^2y + 12A_{14}xy^2 + 20A_{05}y^3 + \\ & +A_{22}x^2 + 6A_{13}xy + 12A_{04}y^2 + \\ & +2A_{12}x + 6A_{03}y + 2A_{02} - \rho g y\end{aligned} \tag{B–6a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} = {} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y = \\ & 20A_{50}x^3 + 12A_{41}x^2y + 6A_{32}xy^2 + 2A_{23}y^3 + \\ & +12A_{40}x^2 + 6A_{31}xy + 2A_{22}y^2 + \\ & +6A_{30}x + 2A_{21}y + 2A_{20} - \rho g y\end{aligned} \tag{B–6b}$$

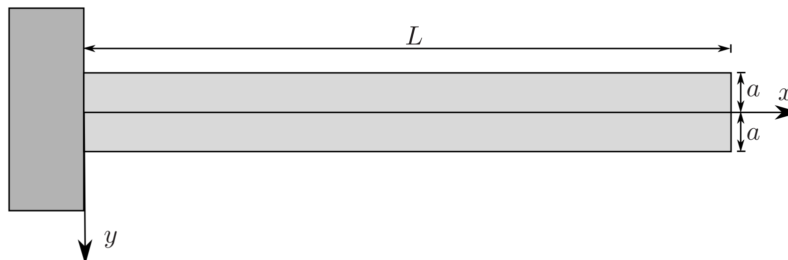


Figura B–1: Obtención de la función de Airy para una ménsula sometida a su propio peso.

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = 4A_{41}x^3 + 6A_{32}x^2y + 6A_{23}xy^2 + 4A_{14}y^3 + \\ +3A_{31}x^2 + 4A_{22}xy + 3A_{13}y^2 + \\ +2A_{21}x + 2A_{12}y + A_{11} \tag{B–6c}$$

Condiciones en las tensiones cortantes. Todas las superficies externas están libres de fuerzas cortantes. Por tanto, las tensiones cortantes deberán ser nulas en todos los puntos de las mismas.

Para la cara extrema a $x = L$ debe cumplirse $\tau_{xy}(L, y) = 0$ y por tanto

$$\tau_{xy}(L, y) = 0 = 4A_{14}y^3 + (6A_{23}L + 3A_{13})y^2 + \\ +(6A_{32}L^2 + 4A_{22}L + 2A_{12})y + \\ +4A_{41}L^3 + 3A_{31}L^2 + 2A_{21}L + A_{11}$$

también deberá cumplirse para todo valor de y, por lo que los coeficientes de las distintas potencias de y deben ser todos 0,

$$A_{14} = 0 \tag{B–7a}$$
$$2A_{23}L + A_{13} = 0 \tag{B–7b}$$
$$3A_{32}L^2 + 2A_{22}L + A_{12} = 0 \tag{B–7c}$$
$$4A_{41}L^3 + 3A_{31}L^2 + 2A_{21}L + A_{11} = 0 \tag{B–7d}$$

Para las caras superior e inferior, las tensiones cortantes también serán nulas en todos los puntos, $\tau_{xy}(x, \pm a) = 0$. Así, utilizando la ecuación (B–6c) se cumplirá

$$\tau_{xy}(x, \pm a) = 0 = 4A_{41}x^3 + (\pm 6A_{32}a + 3A_{31})x^2 + \\ (6A_{23}a^2 \pm 4A_{22}a + 2A_{21})x + \\ (\pm 4A_{14}a^3 + 3A_{13}a^2 \pm 2A_{12}a + A_{11})$$

para todo valor de x, donde el signo superior se refiere a la cara inferior y el inferior a la superior. Todos los coeficientes de las distintas potencias de x deben ser 0, y esto debe ser así tanto para la cara inferior como para la superior. Si tomamos, por ejemplo, el coeficiente de x^2 para las caras superior e inferior y sumamos o restamos ambos el resultado seguirá siendo nulo, pero además observamos que la suma de las partes que no cambian de signo debe ser nula, lo mismo que la suma de las partes que cambian de signo 8en el fondo es lo que obtenemos al sumar o restar los coeficientes de las caras superior e inferior). Así, obtenemos, a partir de la condición de contorno de las tensiones cortantes en las caras superior e inferior,

$$A_{41} = 0 \tag{B–8a}$$
$$A_{32} = 0 \tag{B–8b}$$
$$A_{31} = 0 \tag{B–8c}$$
$$A_{22} = 0 \tag{B–8d}$$
$$3A_{23}a^2 + A_{21} = 0 \tag{B–8e}$$
$$4A_{14}a^3 + 2A_{12}a = 0 \tag{B–8f}$$
$$3A_{13}a^2 + A_{11} = 0. \tag{B–8g}$$

Ahora bien, vimos en (B–7a) que A_{14} es cero, por lo que, a partir de (B–8e), A_{12} también debe serlo. Resumiendo y simplificando los resultados obtenidos a partir de las condiciones de contorno para las tensiones cortantes,

$$A_{12} = A_{14} = A_{22} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = 0 \tag{B–9a}$$
$$2A_{23}L + A_{13} = 0 \tag{B–9b}$$
$$2A_{21}L + A_{11} = 0 \tag{B–9c}$$
$$3A_{23}a^2 + A_{21} = 0 \tag{B–9d}$$
$$3A_{13}a^2 + A_{11} = 0. \tag{B–9e}$$

Condiciones en las tensiones normales. Veamos ahora qué información tenemos acerca de las tensiones normales en los límites.

Por una parte, la tensión normal de tracción en la dirección x debe ser nula en todos los puntos del extremo libre,

$$\sigma_{xx}(L, y) = 20A_{05}y^3 + 12A_{04}y^2 + (6A_{23}L^2 + 6A_{13}L + 6A_{03} - \rho g)y + 2A_{02}$$

donde ya hemos tenido en cuenta que $A_{14} = A_{22} = A_{32} = 0$. Como esta expresión debe cumplirse para cualquier valor de y, los coeficientes de sus potencias serán todos nulos, quedando

$$A_{05} = 0 \qquad \text{(B–10a)}$$
$$A_{04} = 0 \qquad \text{(B–10b)}$$
$$6A_{23}L^2 + 6A_{13}L + 6A_{03} - \rho g = 0 \qquad \text{(B–10c)}$$
$$A_{02} = 0. \qquad \text{(B–10d)}$$

Veamos otra condición más. Tanto en la cara superior como en la inferior, la tensión normal $\sigma_{yy}(x, \pm a)$ debe ser nula, lo que da las ecuaciones

$$\sigma_{yy}(x, \pm a) = 20A_{50}x^3 + 12A_{40}x^2 + 6A_{30}x + (\pm 2A_{23}a^3 \pm 2A_{21}a + 2A_{20} \mp \rho g a)$$

donde se ha tenido en cuenta que $A_{22} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = 0$ Los coeficientes de las potencias de x deben ser nulos y, dentro de éstos la suma de las partes que cambian de signo y la suma de las partes que no cambian de signo, dando

$$A_{50} = 0 \qquad \text{(B–11a)}$$
$$A_{40} = 0 \qquad \text{(B–11b)}$$
$$A_{30} = 0 \qquad \text{(B–11c)}$$
$$A_{20} = 0 \qquad \text{(B–11d)}$$
$$2A_{23}a^3 + 2A_{21}a - \rho g a = 0 \qquad \text{(B–11e)}$$

Combinando todos los elementos. Una vez aplicadas las condiciones de contorno anteriores nos queda una sistema de seis ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A_{23}L + A_{13} &= 0 \\ 2A_{21}L + A_{11} &= 0 \\ 3A_{23}a^2 + A_{21} &= 0 \\ 3A_{13}a^2 + A_{11} &= 0 \\ 6A_{23}L^2 + 6A_{13}L + 6A_{03} - \rho g &= 0 \\ 2A_{23}a^3 + 2A_{21}a - \rho g a &= 0 \end{aligned}$$

con cinco incógnitas. En realidad, las cuatro primeras ecuaciones no son linealmente independientes, luego lo que tenemos es un sistema de cinco ecuaciones con las cinco incógnitas que debemos extraer. Esto es muy sencillo, ya que entre las ecuaciones (B–9b) y (B–11e) es trivial despejar A_{21} y A_{23} y sacar entonces A_{11} de (B–9c) y A_{13} de (B–9b). Finalmente, A_{03} se obtiene de (B–10c), quedando los coeficientes

$$\begin{aligned} A_{03} &= \frac{1}{6}\rho g - \frac{\rho g L^2}{4a^2} \\ A_{11} &= -\frac{3}{2}\rho g L \\ A_{13} &= \frac{\rho g L}{2a^2} \\ A_{21} &= \frac{3}{4}\rho g \\ A_{23} &= -\frac{\rho g}{4a^2} \end{aligned} \qquad \text{(B–12)}$$

y la función de Airy, una vez agrupados los términos,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6}\rho g y^3 - \frac{\rho g}{4a^2}y^3(x - L)^2 + \frac{3}{4}\rho g x y(x - 2L). \qquad \text{(B–13)}$$

Comprobando el resultado. Veamos los resultados que se obtienen a partir de la función de Airy (B–13). Para las tensiones σ_{xx}, se tiene

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \rho g y = -\frac{3\rho g}{2a^2} y(L-x)^2, \tag{B–14}$$

similar a lo que se obtendría de la ecuación (1–61), sustituyendo $\rho = M/(2abL)$ y el momento de inercia de la sección plana rectangular por su valor $I_{zz} = 2ba^3/3$. Para las tensiones cortantes τ_{xy} se obtiene

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{3\rho g}{2a^2}(y^2 - a^2)(x-L), \tag{B–15}$$

similar a lo que se obtiene a partir de la ecuación (1–73) con $h = 2a$ y el valor de $T(x)$ dado por (1–62). Finalmente se obtiene, para las tensiones σ_{yy},

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \rho y g = \frac{\rho g}{2a^2} y(a^2 - y^2), \tag{B–16}$$

ecuación que no obtuvimos, pero que nos expresa la forma de las tensiones normales en la dirección vertical a que se hace referencia en la página 26.

Referencias

[1] García de Arangoa, A., *Elasticidad teórica. Fundamentos. Aplicaciones*. Ed. por el autor, Madrid, 1974.

[2] Timoshenko, S. y D. H. Young, *Elementos de resistencia de materiales*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, S.A., México, 1991.

[3] Timoshenko, S. y J. N. Goodier, *Teoría de la Elasticidad*. Ed. URMO, Bilbao, 1968.

[4] Shames, I. H., *Introducción a la mecánica de los sólidos*. Prentice Hall, N. J., 1979.

[5] Rodríguez-Avial, F., *Problemas de resistencia de materiales*. Sección de publicaciones. ETS de Ingenieros Indistriales, Madrid, 1976.

[6] Den Hartog, J. P., *Strength of Materials*. Dover, Nueva York, 1977.

[7] Landau, L., A. Ajiezer y E. Lifshitz, *Curso de Física general: mecánica y Física molecular*. Ed. Mir, Moscú, 1979.

[8] Fleury, P. y J. P. Mathieu, *Chaleur, thermodynamique, états de la matière*. Éditions Eyrolles, París, 1964.

[9] Castañs Camargo, M. y F. Soriano Santandreu, *Apuntes prácticos de Física: termodinámica y elasticidad*. Cátedra de Física, E.T.S. Arquitectura de Madrid, Madrid, 1987.

[10] Strelkóv, S., *Mecánica*. Ed. Mir, Moscú, 1978.

[11] Nash, W. A., *Resistencia de materiales*. McGraw-Hill, México, 1988.

[12] Stiopin, P. A., *Resistencia de materiales*. Mir, Moscú, 1976.

[13] Volmir, A., *Problemas de resistencia de materiales*. Ed. Mir, Moscú, 1986.

[14] Anderson, H. L. (editor), *Physics Vademecum*. American Institute of Physics, N. York, 1981.

[15] Lakes, R., *Science* **235**, 1038–1040, 1987.

[16] Nye, J. F., *Physical properties of crystals. Their representation by tensors and matrices*. Oxford University Press, Oxford, 1985.

[17] Lovett, D. R., *Tensor properties of crystals*. Adam Hilger Books, Bristol, 1989.

[18] Muelas, S., "El conocimiento práctico del medio continuo I: Elasticidad lineal." `http://gmc.mecanica.upm.es/~smuelas/elasticidad/elash.html`.

[19] Chou, P. C. y N. J. Pagano, *Elasticity. Tensor, dyadic and engineering approaches*. Dover, New York, 1992.

[20] Hervás Burgos, P., M. Rodríguez Danta y J. Martínez García, *Cuadernos de Mecánica: cinemática y tensores*. Manuales universitarios, Editorial Universidad de Sevilla, Sevilla, 1989.

Indice alfabético

Indice

CUADERNO

368.01

Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

